

نامساوی‌هایی برای ماتریس‌های قطعه‌ای و گسترشی مثبت

جواد بازوند

کارشناس ارشد ریاضی محض (گرایش آنالیز)

چکیده

در این مقاله، ما ابتدا به معرفی ماتریس‌های معین مثبت و نامساوی‌های مشهور برای ماتریس‌های نیمه معین مثبت می‌پردازیم. سپس به بیان و بررسی نامساوی‌های مشابه آن‌ها را که برای ماتریس قطعه‌ای اثبات شده‌اند می‌پردازیم. سپس میانگین هندسی و چند میانگین دیگر را برای ماتریس‌های قطعه‌ای و گسترشی تعریف می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: تابع یکنوای ماتریسی، ماتریس قطعه‌ای، ماتریس گسترشی، نامساوی چویی، نگاشت خطی مثبت.

۱- مقدمه

در دهه‌های اخیر ریاضیدانان متعددی به بررسی حالات مختلف نامساوی‌ها پرداخته‌اند. از جمله این ریاضیدانان می‌توان به کیتانه^۱، بهاثیا^۲، و سبابه^۳ اشاره کرد که مقالات فراوانی از آن‌ها در مجلات مختلف ریاضی منتشر شده است. در سال ۲۰۱۰ کیتانه چند نامساوی معروف را به دست آورد سپس با استفاده از آن‌ها نامساوی‌های ماتریسی جدید از نوع هاینز^۴ را ارائه داد. همچنین تا سال ۲۰۲۰ مقالات فراوانی در زمینه ماتریس‌های معین مثبت و ماتریس‌های قطعه‌ای به چاپ رسانده است. از جمله پژوهش‌های دیگر در این زمینه می‌توان به مقالات بهاثیا اشاره کرد. همچنین سال مصلحیان^۵ و باخرد^۶ چندین سال است که در این زمینه مقالات متعددی به چاپ رسانده‌اند.

در این بخش منظور از میدان $\mathbb{K}$ همان $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ می‌باشد، مگر یکی از آن‌ها قید گردد، همچنین X یک فضای خطی مختلط و A ، جبری مختلط می‌باشد.

تعریف ۱.۱. فرض کنیم $(X, +)$ گروه آبدی باشد. X را فضای برداری روی میدان F می‌نامیم هرگاه نگاشت $F \times X \rightarrow X$ با ضابطه $ax \rightarrow (a, x)$ دارای خواص زیر باشد:

$$(1) \quad \text{به ازای } x \in X, a, \beta \in F, (a + \beta)x = ax + \beta x.$$

$$(2) \quad \text{به ازای } x_1 + x_2 \in X, a \in F, a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2.$$

$$(3) \quad \text{به ازای } x \in X, a, \beta \in F, a(\beta x) = (a\beta)x.$$

$$(4) \quad \text{به ازای } x \in X, 1x = x.$$

تعریف ۱.۲. یک فضای برداری مختلط (حقیق) را یک فضای ضرب داخلی می‌نامیم هرگاه یک تابع $X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ وجود داشته باشد، بطوریکه به ازای هر $x, y, z \in X$ و $a \in \mathbb{C}$ دارای خواص زیر باشد:

$$(1) \quad (y, x) = \overline{(x, y)}$$

$$(2) \quad ((x + y), z) = (x, z) + (y, z)$$

$$(3) \quad (ax, y) = a(x, y)$$

$$(4) \quad (x, x) \geq 0$$

$$(5) \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

تعریف ۱.۳. فرض کنیم E مجموعه‌ای ناتهی باشد. نگاشت $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ را یک متر روی E نامیم، هرگاه دارای خواص زیر باشد:

$$(1) \quad \text{به ازای هر } x, y \in E, d(x, y) \geq 0.$$

$$(2) \quad x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$$

$$(3) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(4) \quad \text{به ازای هر } x, y, z \in E, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

¹ - Kittaneh

² - Bhatia

³ - Sababheh

⁴ - Heinz

⁵ - Sal Moslehian

⁶ - Bakherad

تعریف ۴.۱. فضای ضرب داخلی H را یک فضای هیلبرت می‌نامیم هرگاه H یک فضای متریک کامل نسبت به متر تعریف شده به وسیله ضرب داخلی باشد.

تعریف ۵.۱. فرض کنیم X یک فضای خطی روی $\mathbb{k}$ تابع $p: X \rightarrow [0, \infty)$ را یک شبه نرم نامیم، هرگاه:

$$(۱) \quad \text{به ازای هر } x, y \in X \text{ داشته باشیم:}$$

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

$$(۲) \quad \text{به ازای هر } x \in X \text{ و } a \in \mathbb{k} \text{ داشته باشیم:}$$

$$p(ax) = |a|p(x)$$

تعریف ۶.۱. فرض کنید p یک شبه نرم روی فضای خطی X باشد. P را یک نرم نامیم، هرگاه $P(x)=0$ ایجاب کند که $x=0$. اگر فضای خطی دارای یک نرم باشد، آنگاه گوییم X یک فضای نرم دار است. فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد. $B_h(H)$ را فضای همه عملگرهای خطی، کراندار و خود الحاق روی H در نظر بگیرید.

همچنین $B(H)^+$ و $B(H)$ را به ترتیب مجموعه همه عملگرهای خطی و کراندار روی فضای هیلبرت H و مجموعه همه عملگرهای مثبت در $B_h(H)$ در نظر بگیرید.

تعریف ۷.۱. یک همپیچی خطی روی X نگاشت $x \rightarrow x^*$ از X به X است که در اصول زیر صدق می‌کند. (برای تمام

$$(a \in \mathbb{C}, x, y \in X)$$

$$(۱) \quad (x+y)^* = x^* + y^*$$

$$(۲) \quad (ax)^* = \bar{a}x^*$$

$$(۳) \quad (x^*)^* = x$$

اصل (۳) اشاره دارد به اینکه هر همپیچی، دوسویی است.

تعریف ۸.۱. همپیچی جبری یا بطور ساده‌تر همپیچی روی A ، یک همپیچی خطی روی A ، است که در اصل زیر صدق می‌کند.

$$(xy)^* = y^*x^*$$

تعریف ۹.۱.

$$(۱) \quad \text{جبر } A, \text{ با همپیچی } *, - \text{ جبر نامیده می‌شود}$$

$$(۲) \quad - \text{ جبر نرم‌دار، جبری نرم‌دار و مختلط با همپیچی است.}$$

$$(۳) \quad - \text{ جبر باناخ نیز یک } * \text{ جبر نرم‌دار کامل است.}$$

تعریف ۱۰.۱. فرض کنید A ، یک $-*$ جبر باشد:

$$(۱) \quad \text{عضو } a \in A \text{ را خود الحاق (هرمیتی) نامند، هرگاه } a = a^* \text{ مجموعه اعضای خود الحاق } A, \text{ را با } (A_H)A_{sa} \text{ نشان}$$

می‌دهند.

$$(۲) \quad \text{عضو } a \in A \text{ را نرمال نامند، هرگاه } aa^* = a^*a$$

$$(۳) \quad \text{عضو } u \in A \text{ را یکانی نامند، هرگاه } uu^* = u^*u = 1 \text{ آنگاه } u \text{ را طولپا و اگر } uu^* = 1 \text{ آنگاه}$$

آن را هم طولپا می‌نامند.

مجموع متشکل از اعضای یکانی A را با $U(A)$ نمایش می‌دهند. به سادگی می‌توان نشان داده $U(A)$ یک گروه است، که آن را گروه یکانی A می‌نامند.

اگر A یک $*$ -جبر یکانی باشد و $a \in \text{inu}(A)$ ، آنگاه $(a^{-1})^* = (a^*)^{-1}$

$$a \in \text{inu}(A)$$

اگر و فقط اگر $a^* \in \text{inu}(A)$ بنابراین به آسانی می‌توان نتیجه گرفت

$$\sigma(a^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(a)\}$$

تعریف ۱.۱. فرض کنید A و B هر دو $*$ -جبر باشند. هر همریختی $\phi: A \rightarrow B$ که حافظ همپیچی باشد را یک $*$ -همریختی می‌گویند. به عبارت دیگر، همریختی ϕ یک $*$ -همریختی است، هرگاه برای هر $a \in A$ داشته باشیم:

$$\phi(a^*) = (\phi(a))^*$$

تعرف ۱.۲. فرض کنید A یک $*$ -جبر باناخ باشد، A را یک C^* -جبر می‌گویند، هرگاه برای هر $a \in A$ داشته باشیم

$$\|a\|^2 = \|a^*a\|$$

مثال ۱.۳. ۱. میدان اسکالر $\mathbb{C}$ یک C^* -جبر یکانی است با همپیچی مزدوج مختلط

$$\lambda \rightarrow \bar{\lambda}.$$

و برای هر $a \in \mathbb{C}$ داریم:

$$\|a^*a\| = \|\bar{a}a\| = \|a\|^2.$$

ماتریس‌های معین مثبت، قطعه‌ای، گسترشی مثبت

در این قسمت ابتدا به معرفی ماتریس‌های معین مثبت می‌پردازیم، سپس باتوجه به تعریف قطعه، ماتریس‌های قطعه‌ای و درنهایت ماتریس‌های گسترشی مثبت را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. یک ماتریس $n \times n$ مختلط A را نیمه مثبت معین (نامنفی معین) می‌نامیم و می‌نویسیم $A \geq 0$ اگر

$$x^*Ax \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

A مثبت معین نامیده می‌شود و می‌نویسیم $A > 0$ اگر

$$x^*Ax \geq 0, \quad \forall x (\neq 0) \in \mathbb{C}^n.$$

تعریف ۲.۲. برای هر $A \in \mathbb{M}_n$ تجزیه $A = RA + iIA$ ، را درنظر بگیرید به طوری که

$$RA = \frac{1}{2}(A + A^*) \quad IA = \frac{1}{2}(A - A^*)$$

به این تجزیه دکارتی A می‌گویند. برای مطالعه بیشتر به [۱۱] مراجعه نمایید.

تعریف ۲.۳. برد عددی ماتریس $A \in \mathbb{M}_n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$w(A) = \{x^*Ax : x \in \mathbb{C}^n, xx^* = 1\},$$

یا به صورت

$$w(A) = \max \{|\langle Ax, x \rangle| : x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1\}.$$

بنابراین

$$\|A\| = \max \{|\langle Ax, y \rangle| : x, y \in \mathbb{C}^n, \|x\| = \|y\| = 1\}.$$

واضح است که برد عددی یک نرم روی $\mathbb{M}_n$ است که باتوجه به رابطه زیر با نرم عملگری هم معادل است.

$$\frac{1}{2}\|A\| \leq w(A) \leq \|A\|, A \in \mathbb{M}_n. \quad (۱.۲)$$

تعریف ۲.۴. ماتریس $A \in \mathbb{M}_n$ را یک ماتریس گسترشی می‌نامیم هرگاه قسمت حقیقی آن معین مثبت باشد به عبارت دیگر

$$RA < 0$$

فضای همه ماتریس‌های گسترشی مثبت یک مخروط محدب در $\mathbb{M}_n^+$ می‌باشد که تحت وارون پایا است.

تعریف ۲.۵. برای $a \in [0, \frac{\pi}{2})$ ، S_a را یک قطعه در صفحه به صورت زیر در نظر بگیرید

$$S_a = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} z > 0, |z| \leq (\operatorname{Re} z) \tan a\}.$$

واضح است که هر ماتریس قطعه‌ای لزوماً یک ماتریس گسترشی می‌باشد.

اگر $a \in [0, \frac{\pi}{2})$ ، $w(A) \tan a \in S_a$ ، آنگاه A نامنفرد و RA معین مثبت می‌باشد. همچنین

$w(A+B) \subset S_a$ از طرفی $w(A) \subset S_a$ نتیجه می‌دهد که $w(X^*AX) \subset S_a$ برای هر ماتریس غیرصفر $X \in \mathbb{M}_{n \times m}$

و همچنین $w(A^{-1}) \subset S_a$.

یک ماتریس $A \in \mathbb{M}_n$ را یک ماتریس قطعه‌ای می‌نامیم هرگاه برد عددی A به ازای یک a در S_a قرار بگیرد.

کوچکترین a را اندیس قطعه‌ای A می‌نامیم. وقتی که $w(A) \subset S_a$ ، می‌نویسیم $A \in S_a$.

اخیراً، میانگین عملگری برای دو ماتریس گسترشی $A, B \in \mathbb{M}_n$ را به صورت زیر تعریف کرده‌اند:

تعریف ۲.۶. فرض کنید $A, B \in \mathbb{M}_n$ آنگاه

$$A \sigma_f B = \int_0^1 (A!_s B) du_f(s),$$

به طوریکه $A!_s B = (((1-s)A^{-1} + sB^{-1})^{-1})$ میانگین هارمونیک A و B می‌باشد.

تابع $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ یک تابع عملگری یکنواری باشد به طوریکه $f(1) = 1$ و u_f اندازه احتمال تابع مشخصه متناظر

با σ_f می‌باشد.

فرض کنید $A \in S_a$ و $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ یک تابع عملگری یکنوا باشد به طوریکه $f(1) = 1$ ، آنگاه

$$f(A) = \int_0^1 ((1-s)I + sA^{-1})^{-1} du_f(s), \quad (۲.۲)$$

که u_f اندازه احتمال تابع $f(x) = \int_0^1 ((1-s)I + sx^{-1})^{-1} du_f(s)$ است.

تعریف ۲.۷. فرض کنید $f \in m$ و $A \in \mathbb{M}_n$ یک ماتریس گسترشی باشد. $f(A)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(A) = \int_0^1 I!_t A du_f(t), \quad (۲.۳)$$

که u_f اندازه احتمال تابع $f(A) = \int_0^1 I!_t A du_f(t)$ است.

برای $0 \leq a \leq 1$. همچنین میانگین هاینز را به صورت زیر تعریف کردیم:

$$H_v(A, B) = \frac{A \#_v B + A \#_{1-v} B}{2}$$

که A و B دو عملگر معکوس‌پذیر و $v \in [0, 1]$ می‌باشد.

لم ۸. ۲. [۲۷] اگر A و B دو عملگر مثبت باشند، آنگاه

$$A!_v B \leq A\#_v B \leq A\nabla_v B$$

برای $v \in [0, 1]$.

قضیه ۹. ۲. فرض کنید $A, B \in \mathbb{M}_n$ ماتریس‌های گسترشی باشند و $f \in \mathbf{m}$ آنگاه

$$A\sigma_f B = A^{\frac{1}{2}} f\left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}\right) A^{\frac{1}{2}}.$$

برهان. بنا بر تعریف داریم

$$\begin{aligned} A\sigma_f B &= \int_0^1 (A!_t B) du_f(t) \\ &= \int_0^1 ((1-t)A^{-1} + tB^{-1})^{-1} du_f(t) \\ &= \int_0^1 \left((1-t)I + t\left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \right)^{-1} du_f(t) A^{\frac{1}{2}} \\ &= A^{\frac{1}{2}} f\left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}\right) A^{\frac{1}{2}}. \\ R(A\sigma_f B) &\geq (RA)\sigma_f(RB). \end{aligned}$$

قبلاً اشاره کرده‌ایم که اگر A و B گسترشی باشند آنگاه $A\sigma_f B$ نیز گسترشی می‌باشد.

برهان. فرض کنید $A, B \in \mathbb{M}_n$ ماتریس‌های گسترشی باشند. آنگاه بنا بر لم ۲. ۱۶ داریم

$$\begin{aligned} R(A\sigma_f B) &= \int_0^1 R(A!_t B) du_f(t) \\ &\leq \int_0^1 R(A)!_t R(B) du_f(t) \\ &= (RA)\sigma_f(RB). \end{aligned}$$

وقتی که $A, B \in \mathbb{M}_n$ ماتریس‌های قطعه‌ای باشند وارون نامساوی گزاره قبل را داریم.

نامساوی‌هایی برای ماتریس‌های قطعه‌ای

ابتدا نامساوی‌هایی را که توسط لیو^۷ و وانگ^۸ [۲۵] در سال ۲۰۱۷ برای ماتریس‌های قطعه‌ای اثبات شده‌اند را بیان و بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱. ۳. قرار دهید $A, B \in \mathbb{M}_n$ به طوری که $w(A), w(B) \subset S_a$. آنگاه

$$R(A\#B) \leq \sec^2 a R\left(\frac{A+B}{2}\right).$$

قضیه ۲. ۳. قرار دهید $A, B \in \mathbb{M}$ به طوری که $w(A), w(B) \subset S_a$. آنگاه

⁷ Liu

⁸ Wang

$$R\left(\frac{A^{-1} + B^{-1}}{2}\right)^{-1} \leq \sec^2 a R(A \# B).$$

برهان. با جایگذاری معکوس‌های A و B در قضیه ۱.۳، به طور متناظر و به کار بردن لم ۱۵.۲، ما داریم

$$\begin{aligned} \sec^2 a R\left(\frac{A^{-1} + B^{-1}}{2}\right)^{-1} &\geq R(A^{-1} \# B^{-1}) \\ &\geq R(A^{-1}) \# R(B^{-1}). \end{aligned}$$

با معکوس گرفتن از دو طرف نامساوی فوق خواهیم داشت

$$R^{-1}\left(\frac{A^{-1} + B^{-1}}{2}\right) \leq \sec^2 a (R(A^{-1}) \# R(B^{-1}))^{-1}$$

با استفاده از نامساوی اخیر، لم ۱۸.۲ و خاصیت‌های میانگین حسابی، داریم

$$\begin{aligned} R\left(\frac{A^{-1} + B^{-1}}{2}\right)^{-1} &\leq R^{-1}\left(\frac{A^{-1} + B^{-1}}{2}\right) \\ &\leq \sec^2 a (R(A^{-1}) \# R(B^{-1}))^{-1} \\ &= \sec^2 a (R(A^{-1})^{-1} \# R(B^{-1}))^{-1} \\ &\leq \sec^2 a (R(A) \# R(B)). \end{aligned}$$

قضیه ۳.۳. قرار دهید $A, B \in \mathbb{M}$ به طوری که $w(A), w(B) \subset S_a$. آنگاه

$$\sigma_j\left(\frac{A^{-1} + B^{-1}}{2}\right)^{-1} \leq \sec^4 a \sigma_j(A \# B)$$

به ازای $j=1, \dots, n$.

برهان. با استفاده از لم ۱۹.۲، داریم

$$\begin{aligned} \sigma_j\left(\frac{A^{-1} + B^{-1}}{2}\right)^{-1} &\leq \sec^2 a \lambda_j\left(R\left(\frac{A^{-1} + B^{-1}}{2}\right)^{-1}\right) \\ &\leq \sec^4 a \lambda_j(R(A \# B)) \\ &\leq \sec^4 a \sigma_j(A \# B). \end{aligned}$$

نتیجه ۳.۴. قرار دهید $A, B \in \mathbb{M}_n$ به طوری که $w(A), w(B) \subset S_a$. آنگاه

$$\sigma_j\left(\frac{A^{-1} + B^{-1}}{2}\right)^{-1} \leq 4 \sigma_j(A \# B)$$

به ازای $j=1, \dots, n$.

نتیجه ۳.۵. قرار دهید $A, B \in \mathbb{M}_n$ به طوری که $w(A), w(B) \subset S_a$. آنگاه

$$\left\|\left(\frac{A^{-1} + B^{-1}}{2}\right)^{-1}\right\| \leq \sec^3 a \|A \# B\|$$

برای هر نرم یکانی پایای $\|0\|$ روی $\mathbb{M}_n$.

برهان. با استفاده از لم ۱۵.۲، ما داریم

$$\begin{aligned} \left\| \left(\frac{A^{-1} + B^{-1}}{2} \right)^{-1} \right\| &\leq \sec a \left\| R \left(\frac{A^{-1} + B^{-1}}{2} \right)^{-1} \right\| \\ &\leq \sec^3 a \|R(A \# B)\| \\ &\leq \sec^3 a \|A \# B\|. \end{aligned}$$

نتیجه ۳.۶. قرار دهید $A, B \in \mathbb{M}_n$ به طوری که $w(A), w(B) \subset S_a$. آنگاه

$$\left\| \left(\frac{A^{-1} + B^{-1}}{2} \right)^{-1} \right\| \leq 2\sqrt{2} \|A \# B\|$$

برای هر نرم یکانی پایای $\|0\|$ روی $\mathbb{M}_n$.

۵.۰.۳. نامساوی‌هایی برای ماتریس‌های قطعه‌ای شامل میانگین هاینز

در این بخش چند نامساوی مهم که توسط مائو^۹ و همکارانش در سال ۲۰۲۰، برای ماتریس‌های قطعه‌ای به اثبات رسانده‌اند را بیان و بررسی می‌کنیم. [۲۶]

قضیه ۳.۷. قرار دهید $A, B \in \mathbb{M}_n$ به طوری که $w(A), w(B) \subset S_a$. آنگاه

$$H_v(RA, RB) \leq RH_v(A, B).$$

برهان. با استفاده از لم ۱۵.۲ داریم

$$\begin{aligned} RH_v(A, B) &= R \left(\frac{A \#_v B + A \#_{1-v} B}{2} \right) \\ &= \frac{R(A \#_v B) + R(A \#_{1-v} B)}{2} \\ &\geq \frac{(RA \#_v RB) + (RA \#_{1-v} RB)}{2} \\ &= H_v(RA, RB). \end{aligned}$$

قضیه ۳.۸. قرار دهید $A, B \in \mathbb{M}_n$ به طوری که $w(A), w(B) \subset S_a$. آنگاه

$$RH_v(A, B) \leq \sec^2 a H_v(RA, RB).$$

برهان. با استفاده از لم ۱۵.۲ و لم ۱۷.۲ داریم

$$\begin{aligned} RH_v(A, B) &= R \left(\frac{A \#_v B + A \#_{1-v} B}{2} \right) \\ &= \frac{R(A \#_v B) + R(A \#_{1-v} B)}{2} \\ &\leq \frac{(\sec^2 a RA \#_v \sec^2 a RB) + (\sec^2 a RA \#_{1-v} \sec^2 a RB)}{2} \\ &= \sec^2 a H_v(RA, RB). \end{aligned}$$

قضیه ۳.۹. قرار دهید $A, B \in \mathbb{M}_n$ به طوری که $w(A), w(B) \subset S_a$ و $v \in [0, 1]$. آنگاه

$$\cos^2 a R(A \# B) \leq RH_v(A, B) \leq \sec^2 a R(A \nabla B).$$

برهان. با استفاده از قضیه‌های ۱۲.۲ و ۷.۳ داریم

^۹ Mao

$$\begin{aligned}\cos^2 a R(A \# B) &\leq R A \# R B \\ &\leq H_v(RA, RB) \\ &= RH_v(A, B)\end{aligned}$$

همچنین با استفاده از قضیه‌های ۱۲.۲ و ۸.۳ داریم

$$\begin{aligned}RH_v(A, B) &\leq \sec^2 a H_v(RA, RB) \\ &\leq \sec^2 a (RA \vee RB) \\ &= \sec^2 a R(A \vee B).\end{aligned}$$

قضیه ۱۰.۳. قرار دهید $A, B \in \mathbb{M}_n$ به طوری که $w(A), w(B) \subset S_a$ و قرار دهید $v \in [0, 1]$ ، آنگاه

$$\cos^4 a \sigma_j(A \# B) \leq \sigma_j(H_v(A, B)) \leq \sec^4 a \sigma_j\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

به ازای $j=1, \dots, n$

برهان. با استفاده از قضیه ۹.۳ و لم ۱۹.۲ داریم

$$\begin{aligned}&\leq \sec^4 a \sigma_j R(H_v(A, B)) \\ &\leq \sec^4 a \sigma_j R(H_v(A, B)).\end{aligned}$$

و به طور مشابه

$$\begin{aligned}\sigma_j(H_v(A, B)) &\leq \sec^2 a \lambda_j(RH_v(A, B)) \\ &\leq \sec^4 a \lambda_j R\left(\frac{A+B}{2}\right) \\ &\leq \sec^4 a \sigma_j\left(\frac{A+B}{2}\right).\end{aligned}$$

می‌دانیم برای هر $A, B \in \mathbb{M}_n$ داریم $|\det A| = \prod_{j=1}^n \sigma_j(A)$. نتیجه زیر را باتوجه به این نکته و قضیه ۱۰.۳ به دست می‌آوریم:

نتیجه ۱۱.۳. قرار دهید $A, B \in \mathbb{M}_n$ به طوری که $w(A), w(B) \subset S_a$ و قرار دهید $v \in [0, 1]$ ، آنگاه

$$\cos^{4n} a |\det(A \# B)| \leq \det(RH_v(A, B)) \leq \cos^{4n} a \left| \det\left(\frac{A+B}{2}\right) \right|.$$

نتیجه ۱۲.۳. قرار دهید $A, B \in \mathbb{M}_n$ به طوری که $w(A), w(B) \subset S_a$ و قرار دهید $v \in [0, 1]$ ، آنگاه

$$\cos^3 a \|A \# B\| \leq \|H_v(A, B)\| \leq \sec^3 a \left\| \frac{A+B}{2} \right\|,$$

به ازای هر نرم یکانی پایا.

برهان. با بکار بردن قضیه ۹.۳ و لم ۱۹.۲ داریم

$$\begin{aligned}\|A \# B\| &\leq \sec a \|R(A \# B)\| \\ &\leq \sec^3 a \|RH_v(A, B)\| \\ &\leq \sec^3 a \|H_v(A, B)\|\end{aligned}$$

و

$$\|H_v(A, B)\| \leq \sec a \|RH_v(A, B)\|$$

$$\leq \sec^3 a \|R(A \nabla B)\| \\ \leq \sec^3 a \|A \nabla B\|.$$

قضیه ۱۳.۳. قرار دهید $A, B \in M_n$ به طوری که $w(A), w(B) \subset S_a$ و قرار دهید $v \in [0,1]$ ، آنگاه

$$RH_v^{-1}(A, B) \leq \sec^2 a RH_v(A^{-1}, B^{-1})$$

برهان. می‌دانیم اگر X دارای قسمت حقیقی مثبت باشد، آنگاه خواهیم داشت

$$RX^{-1} \leq (RX)^{-1},$$

بنابراین

$$RH_v(A, B)^{-1} \leq (RH_v(A, B))^{-1}.$$

با بکار بردن تابع محدب $f(t) = \frac{1}{t}$ برای ماتریس‌های معین مثبت و لم ۲.۱۸، داریم

$$\begin{aligned} (RH_v(A, B))^{-1} &= \left(R \frac{A \#_v B + A \#_{1-v} B}{2} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{R(A \#_v B) + R(A \#_{1-v} B)}{2} \right)^{-1} \\ &\leq \frac{R^{-1}(A \#_v B) + R^{-1}(A \#_{1-v} B)}{2} \\ &\leq \frac{\sec^2 a R(A \#_v B)^{-1} + \sec^2 a R(A \#_{1-v} B)^{-1}}{2} \\ &\leq \frac{\sec^2 a R(A^{-1} \#_v B^{-1}) + \sec^2 a R(A^{-1} \#_{1-v} B^{-1})}{2} \\ &= \sec^2 a RH_v(A^{-1}, B^{-1}) \end{aligned}$$

اخیراً بدرانی^{۱۰} و همکارانش [۹] نامساوی‌های مهمی را برای برد عددی ماتریس‌های قطعه‌ای بدست آورده‌اند.

نتیجه ۱.۵. فرض کنید $A \in S_a$ ، آنگاه برای $t \in (-1,1)$ ، داریم

$$\cos ta \|A^t\| \leq w(A^t) \leq \|A^t\|.$$

برهان. با بکار بردن لم ۲.۲۳، لم ۲.۱۹ و لم ۲.۳۴ اثبات می‌شود.

قضیه ۲.۵. فرض کنید $A \in S_a$ ، آنگاه برای $t \in (0,1)$ ، داریم

$$\cos ta \cos^t a w^t(A) \leq (A^t) \sec ta \sec^{2t} a w^t(A).$$

برهان.

$$\begin{aligned} w^t(A) &\leq \|A^t\| \leq \sec ta \|RA^t\| \\ &\leq \sec ta \sec^{2t} a \|R^t A\| \\ &\leq \sec ta \sec^{2t} a \|RA\|^t \\ &= \sec ta \sec^{2t} a w^t(RA) \\ &\leq \sec ta \sec^{2t} a w^t(A). \end{aligned}$$

¹⁰ Bedrani

نامساوی اول را با استفاده از لم ۱۹.۲، نامساوی دوم را با استفاده از لم ۳۲.۲، نامساوی سوم را با استفاده از لم ۱۹.۲ و نامساوی آخر را با استفاده از لم ۱.۲ بدست آورده‌ایم.

$$\begin{aligned} w^t(A) &\geq \cos ta \|A^t\| \geq \cos ta \|RA^t\| \\ &\geq \cos ta \|R^t A\| \\ &= \cos ta \|RA\|^t \\ &\geq \cos ta \cos^t a \|A\|^t \\ &\geq \cos ta \cos^t aw^t(A). \end{aligned}$$

نامساوی اول را با استفاده از لم ۱۹.۲، نامساوی دوم را با استفاده از لم ۳۲.۲، نامساوی سوم را با استفاده از لم ۱۹.۲ و نامساوی آخر را با استفاده از لم ۱.۲ بدست آورده‌ایم.

قضیه ۳.۵. فرض کنید $A \in S_a$ آنگاه برای $t \in [-1, 1]$ داریم

$$\cos ta \cos^{2t} aw^{-t}(A) \leq w(A^{-t}).$$

برهان.

$$\begin{aligned} w(A^{-t}) &\geq \cos ta \|A^{-t}\| \geq \cos ta \|RA^{-t}\| \\ &\geq \cos ta \cos^{2t} a \|R^{-t} A\| \\ &\geq \cos ta \cos^{2t} a \|RA\|^{-t} \\ &= \cos ta \cos^{2t} aw^{-t}(RA) \\ &\geq \cos ta \cos^{2t} aw^{-t}(A). \end{aligned}$$

نامساوی اول را با استفاده از لم ۱۹.۲، نامساوی دوم را با استفاده از لم ۳۱.۲، نامساوی سوم را با استفاده از لم ۲۲.۲ و نامساوی آخر را با استفاده از لم ۲۱.۲ بدست آورده‌ایم.

اگر A مثبت باشد، آنگاه داریم $a=0$ و ما برای $t \in [-1, 1]$ نامساوی مشهور زیر را خواهیم داشت.

$$\|A\|^{-t} \leq \|A^{-t}\|.$$

نتیجه ۴.۵. فرض کنید $A \in S_a$ آنگاه

$$\cos^3 aw^{-1}(A) \leq w^{-1}(A).$$

برهان. کفایت در قضیه ۵.۳، فرض کنیم $t=1$.

قضیه ۵.۵. فرض کنید $A, B \in S_a$ آنگاه

$$w(AB) \leq \sec^2 aw(A)w(B).$$

برهان.

$$\begin{aligned} w(AB) &\leq \|A\| \\ &\leq \|A\| \|B\| \\ &\leq \sec^2 a \|RA\| \|RB\| \\ &= \sec^2 aw(RA)w(RB) \\ &\leq \sec^2 aw(A)w(B), \end{aligned}$$

نامساوی اول را با استفاده از لم ۱.۲، نامساوی دوم را با استفاده از لم ۱۹.۲ و نامساوی آخر را با استفاده از لم ۲۱.۲ بدست آورده‌ایم.

گزاره ۶.۵. فرض کنید $A, B \in S_a$ و $f \in m$. آنگاه $A\sigma_f B \in S_a$.

برهان. فرض کنید $A, B \in S_a$ واضح است که

$$A\sigma_f B = \int_0^1 (A!_s B) du_f(s)$$

برای هر اندازه مثبت $u_f(s)$ روی بازه $[0,1]$. آنگاه برای هر بردار یکه $x \in \mathbb{C}$ داریم

$$\begin{aligned} \langle A\sigma_f B_{x,x} \rangle &= \int_0^1 \langle (A!_s B)_{x,x} \rangle du_f(s) \\ &= \int_0^1 h(s) du_f(s) \quad (h(s) = \langle (A!_s B)_{x,x} \rangle) \\ &= c + id, \end{aligned}$$

که

$$c = R \int_0^1 h(s) du_f(s), d = I \int_0^1 h(s) du_f(s).$$

با توجه به اینکه $A, B \in S_a$ برای هر $s \in [0,1]$ داریم $h(s) \in S_a$ قبلاً اثبات کردیم که S_a تحت جمع و وارون پایا است. نشان می‌دهیم که $A\sigma_f B \in S_a$ کفایت نشان دهیم که $\langle A\sigma_f B_{x,x} \rangle \in S_a$ یا $|d| \leq \tan a c$. در حقیقت، ما داریم

$$\begin{aligned} |d| &= I \left| \int_0^1 h(s) du_f(s) \right| \\ &\leq \int_0^1 |h(s)| du_f(s) \\ &\leq \int_0^1 \tan a R h(s) du_f(s) \quad (h(s) \in S_a) \\ &= \tan a c. \end{aligned}$$

که این نشان می‌دهد $A\sigma_f B \in S_a$ و برهان تمام می‌شود.

بنا بر رابطه ۲.۲، داریم

$$I\sigma_f A = f(A), \quad f \in m.$$

پس با استفاده از گزاره ۵.۶، نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۷.۵. فرض کنید $A \in S_a$ و $f \in m$. آنگاه $f(A) \in S_a$.

در یک حالت خاص داریم:

نتیجه ۸.۵. فرض کنید $A \in S_a$ و $t \in (0,1)$. آنگاه $A^t \in S_a$.

نتیجه ۹.۵. قرار دهید $A \in S_a$ اگر $f \in m$ آنگاه

$$\cos af(w(A)) \leq w(f(A)) \leq \sec^3 af(w(A)).$$

برهان. بدیهی است که برای هر تابع یکنوای نامنفی f و هر $0 \leq s \leq 1$ ما می‌توانیم $f(sx) \geq sf(x)$ را در نظر بگیریم. با

استفاده از لم ۲.۲ و لم ۲.۳ داریم

$$\cos af(w(A)) \leq f(\cos aw(A))$$

$$\begin{aligned}
&\leq f(w(RA)) \\
&= f(\|RA\|) \\
&\leq \|Rf(A)\| \\
&= w(Rf(A)) \\
&\leq w(f(A)).
\end{aligned}$$

سپس با استفاده از نتیجه ۵.۷، لم‌های ۲.۱۹ و ۲.۳۰ داریم

$$\begin{aligned}
w(f(A)) &\leq \|f(A)\| \leq \sec a \|Rf(A)\| \\
&\leq \sec^3 a f(\|RA\|) \\
&= \sec^3 a f(w(R)) \\
&\leq \sec^3 a f((wA)),
\end{aligned}$$

ما از یکنوایی f استفاده کردیم و برهان کامل شد.

وقتی که A مثبت است، آنگاه $a = 0$ و ما نامساوی مشهور زیر را بدست می‌آوریم:

$$\|f(A)\| = f(\|A\|).$$

گزاره ۱۰.۵. قرار دهید $A, B \in S_a$ اگر $f \in m$ ، آنگاه برای هر $v \in (0,1)$

$$w(1-v)f(A) + vf(B) \leq \sec^3 a f((1-v)w(A) + vw(B)).$$

برهان. با استفاده از قضیه ۵.۹ ما داریم

$$\begin{aligned}
w(1-v)f(A) + vf(B) &\leq (1-v)w(f(A)) + vw(f(B)) \\
&\leq \sec^3 a \left((1-v)f(w(A)) + vf(w(B)) \right) \\
&\leq \sec^3 a f((1-v)w(A) + vw(B)),
\end{aligned}$$

که در نامساوی آخر از مقعر بودن f استفاده کرده‌ایم.

نتیجه ۱۱.۵. قرار دهید $A, B \in S_a$ آنگاه برای $f(t) = x^t$ ، $t \in (0,1)$ و $0 < t < 1$ و $v = \frac{1}{2}$.

از طرف دیگر، در قضیه بعد یک نامساوی زیر جمعی را برای برد عددی و تابع عملگری یکنوا بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱۲.۵. قرار دهید اگر $A, B \in S_a$ ، $f \in m$ ، آنگاه

$$w(A^t + B^t) \leq 2^{1-t} \sec^3 a (w(A) + w(B))^t.$$

برهان. کفایت در گزاره ۵.۱۰، قرار دهیم

$$w(f(A+B)) \leq \sec^3 a (w(f(A)) + w(f(B))).$$

برهان.

$$\begin{aligned}
w(f(A+B)) &\leq \|f(A+B)\| \leq \sec a \|Rf(A+B)\| \\
&\leq \sec^3 a \|f(RA+RB)\| \\
&\leq \sec^3 a \|R(f(A)+f(B))\| \\
&= \sec^3 a w(R(f(A)+f(B))) \\
&\leq \sec^3 a w(f(A)+f(B)).
\end{aligned}$$

نامساوی اول را با استفاده از لم ۲. ۱۹ نامساوی دوم را با استفاده از لم ۲. ۲۹، نامساوی سوم را با استفاده از قضیه ۲. ۲۷، نامساوی چهارم را با استفاده از لم ۲. ۲۹ و نامساوی آخر را با استفاده از لم ۲. ۲۱ بدست آورده‌ایم.

قضیه ۱۳. ۵. قرار دهید اگر $A, B \in S_a$ ، آنگاه برای $0 < t < 1$ ،

$$w((A+B)^t) \leq \sec^3 a w(A^t + B^t).$$

برهان. این یک نتیجه مستقیم از قضیه ۵. ۱۲ می‌باشد. هرگاه فرض کنیم $f(t) = x^t$ ، برای $0 < t < 1$.

اگر A و B مثبت باشند، آنگاه $a=0$ ، بنابراین نامساوی مشهور زیر به ازای $t \in [0,1]$ به دست می‌آید.

$$\|(A+B)^t\| \leq \|A^t + B^t\|.$$

نتیجه ۱۴. ۵. قرار دهید اگر $A, B \in S_a$ ، آنگاه برای $0 < t < 1$ ،

$$\cos^3 a w((A^t + B^t)^t) \leq w(A^t + B^t) \leq 2^{1-t} \sec^3 a (w(A) + w(B))^t.$$

برهان. این یک نتیجه بدیهی از نتیجه‌های ۵. ۱۱ و ۵. ۱۳ می‌باشد.

وقتی که $A, B \in \mathbb{M}_n$ مثبت باشند، آنگاه به طور واضح $w(A+B) \geq \max(w(A), w(B))$. اگر A یا B مثبت نباشند، این نامساوی برقرار نیست. برای حالتی که A و B قطعه‌ای باشند نامساوی زیر را داریم.

قضیه ۱۵. ۵. قرار دهید $A, B \in S_a$ ، آنگاه

$$\cos^2 a \max(w(A), w(B)) \leq w(A+B).$$

برهان. فرض کنید $A, B \in S_a$ ، آنگاه

$$w(A+B) \geq \cos a \|A+B\|$$

$$\geq \cos a \|RA+RB\|$$

$$= 2\cos a w(X)$$

$$\geq \cos a \|X\|$$

$$= \cos a \max(\|RA\|, \|RB\|)$$

$$= \cos a \max(w(RA), w(RB))$$

$$\geq \cos^2 a \max(w(A), w(B)),$$

که $X = \begin{pmatrix} 0 & RA \\ RB & 0 \end{pmatrix}$ می‌باشد. نامساوی اول و دوم را با استفاده از لم ۲. ۱۹، نامساوی سوم را با استفاده از لم ۲. ۳۵،

نامساوی چهارم را با استفاده از رابطه ۲. ۱، نامساوی پنجم را با استفاده از لم ۲. ۳۶ و نامساوی آخر را با استفاده از لم ۲. ۲۱ بدست آورده‌ایم.

در این قسمت از پایان‌نامه ما نامساوی‌های جدیدی برای برد عددی و میانگین‌های عملگری را بیان و اثبات می‌کنیم. می‌دانیم

وقتی که $A, B \in \mathbb{M}_n$ مثبت باشند، آنگاه برای هر میانگین عملگری σ داریم

$$A\sigma B > 0 \rightarrow w(A\sigma B) = \|A\sigma B\|$$

قضیه ۱۶. ۵. قرار دهید اگر $A, B \in S_a$ ، آنگاه

$$w(A\sigma_f B) \leq \sec^3 a (w(A)\sigma_f w(B)).$$

برهان. بنا بر گزاره ۵. ۶، داریم

$$w(A\sigma_f B) \leq \|A\sigma_f B\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sec a \|R(A\sigma_f B)\| \\
&\leq \sec^3 a \|R(A)\sigma_f R(B)\| \\
&\leq \sec^3 (a \|R(A)\| \sigma_f \|R(B)\|) \\
&= \sec^3 a (w(RA)w(RB)) \\
&\leq \sec^3 a (w(A)\sigma_f w(B)),
\end{aligned}$$

نامساوی اول را با استفاده از لم ۲. ۱۹، نامساوی دوم را با استفاده از لم ۲. ۱۶ نامساوی سوم را با استفاده از لم ۲. ۴۶ و نامساوی آخر را با استفاده از لم ۲. ۲۱ بدست آورده‌ایم.

در حالت خاص، وقتی که $A, B \in \mathbb{M}_n$ مثبت باشند، آنگاه $a=0$ ، بنابر قضیه ۵. ۱۶ نامساوی معروف زیر را داریم:

$$\|A\sigma_f B\| \leq \|A\| \sigma_f \|B\|.$$

نتیجه ۱۷. ۵. قرار دهید اگر $A, B \in S_a$ آنگاه برای $0 < t < 1$.

$$w(A\#_t B) \leq \sec^3 a w^{1-t}(A)w^t(B).$$

برهان. اگر در قضیه ۵. ۱۶ فرض کنیم $\sigma_f = \#_t$ باشد، آنگاه برای $t \in (0,1)$ داریم

$$\begin{aligned}
w(A\#_t B) &\leq \sec^3 a (w(A)\#_t w(B)) \\
&= \sec^3 a w^{1-t}(A)w^t(B).
\end{aligned}$$

که نامساوی آخر را با استفاده از تعریف میانگین هندسی وزن دار نوشته‌ایم.

با برهانی مشابه، نامساوی زیر را برای میانگین لگاریتمی داریم:

قضیه ۱۸. ۵. قرار دهید اگر $A, B \in S_a$ آنگاه برای $0 < t < 1$.

$$w(L(A, B)) \leq \sec^3 a L(w(A), w(B)).$$

برهان. بنا بر تعریف میانگین لگاریتمی (۲. ۴) و نتیجه ۵. ۱۷ داریم

$$\begin{aligned}
w(L(A, B)) &= w\left(\int_0^1 A\#_t B dt\right) \\
&\leq \int_0^1 w(A\#_t B) dt \\
&\leq \sec^3 a \int_0^1 w^{1-t}(A)w^t(B) dt \\
&= \sec^3 a L(w(A), w(B)).
\end{aligned}$$

قضیه ۱۹. ۵. قرار دهید اگر $A, B \in S_a$ آنگاه برای $0 < t < 1$.

$$w(H_t(A, B)) \leq \sec^3 a H_t(w(A), w(B)).$$

برهان. بنا بر تعریف میانگین هاینز و نتیجه ۵. ۱۷ داریم

$$\begin{aligned}
w(H_t(A, B)) &= w\left(\frac{A\#_t B + A\#_{1-t} B}{2}\right) \\
&\leq \frac{w(A\#_t B) + w(A\#_{1-t} B)}{2}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\sec^3 a}{2} (w^{1-t}(A)w^t(B) + w^t(A)w^{1-t}(B)) \\ = \sec^3 a H_t(w(A), w(B)).$$

قضیه ۲۰.۵. قرار دهید اگر $A, B \in S_a$ آنگاه برای $0 < t < 1$.

$$\cos^4 a w(A \# B) \leq w(\sec^3 a H_t(A, B)) \leq \frac{\sec^4 a}{2} w(A + B).$$

برهان. با استفاده از لم‌های ۲۳.۲ و ۳۳.۲ داریم

$$w(A \# B) \leq \|A \# B\| \\ \leq \sec^3 a \|H_t(A, B)\| \\ \leq \sec^4 a w(H_t(A, B)).$$

۹

$$w H_t(A, B) \leq \|H_t(A, B)\| \\ \leq \sec^3 a \left\| \frac{A + B}{2} \right\| \\ \leq \frac{\sec^4 a}{2} w(A + B).$$

نتیجه ۲۱.۵. قرار دهید اگر $A, B \in S_a$ آنگاه برای $0 < t < 1$.

$$\cos a w^{\frac{1}{2}}(AB) \leq H_t(w(A), w(B)).$$

برهان. بنا بر قضیه ۵.۵ داریم

$$\cos a w^{\frac{1}{2}}(AB) \leq \sqrt{w(A)w(B)} \leq H_t(w(A), w(B)).$$

۹.۰.۵ نامساوی‌هایی از ماتریس‌های قطعه‌ای، گسترشی و توابع عملگری یکنوا

قضیه ۲۲.۵. فرض کنید $A, B \in \mathbb{M}_n$ ماتریس‌های گسترشی باشند به طوریکه $w(A), w(B) \subset S_a$ برای $0 \leq a < \frac{\pi}{2}$.

آنگاه

$$\cos^3 a R[(A \nabla B) \# (A! B)] \leq R(A \# B) \leq \sec^2 a R[(A \nabla B) \# (A! B)].$$

برهان.

$$R(A \# B) \geq RA \# RB \\ = (RA \nabla RB) \# (RA! RB) \\ \geq R(A \nabla B) \# (\cos^2 a R(A! B)) \\ = \cos a R(A \nabla B) \# R(A! B) \\ \geq \cos^3 a R[(A \nabla B) \# (A! B)]$$

نامساوی اول را با استفاده از لم ۱۶.۲، تساوی را با استفاده از رابطه ۱۴.۲، نامساوی دوم را با استفاده از لم ۱۶.۲ و نامساوی

آخر را با استفاده از لم ۱۵.۲ بدست آورده‌ایم.

قسمت دوم نامساوی را با استفاده از لم‌های ۱۵.۲ و ۱۴.۲ بدست آورده‌ایم.

$$\begin{aligned}
R[(A \nabla B) \# (A!B)] &\geq R(A \nabla B) \# R(A!B) \\
&\geq R(A \nabla B) \# (RA!RB) \\
&= (RA \nabla RB) \# (RA!RB) \\
&= RA \# RB \\
&\geq \cos^2 a R(A \# B).
\end{aligned}$$

گزاره ۲۳.۵. فرض کنید $A, B \in \mathbb{M}_n$ ماتریس‌های گسترشی باشند و $f \in m$. آنگاه

$$R(A\sigma_f B) \geq (RA)\sigma_f(RB).$$

قبلاً اشاره کرده‌ایم که اگر A و B گسترشی باشند آنگاه $A\sigma_f B$ نیز گسترشی می‌باشد.

برهان. فرض کنید $A, B \in \mathbb{M}_n$ ماتریس‌های گسترشی باشند. آنگاه بنا بر لم ۲.۱۶ داریم

$$\begin{aligned}
R(A\sigma_f B) &= \int_0^1 R(A!_t B) du_f(t) \\
&\leq \int_0^1 R(A)!_t R(B) du_f(t) \\
&= (RA)\sigma_f(RB).
\end{aligned}$$

وقتی که $A, B \in \mathbb{M}_n$ ماتریس‌های قطعه‌ای باشند و f نامساوی گزاره قبل را داریم.

گزاره ۲۴.۵. فرض کنید $A, B \in \mathbb{M}_n$ ماتریس‌های قطعه‌ای باشند بطوریکه $w(A), w(B) \subset S_a$ برای $0 \leq a < \frac{\pi}{2}$. اگر $f \in m$ ، آنگاه

$$R(A\sigma_f B) \leq \sec^2 a (RA)\sigma_f(RB).$$

برهان. بنا بر تعریف ۲.۶ و لم ۲.۱۶ داریم

$$\begin{aligned}
R(A\sigma_f B) &= \int_0^1 R(A!_t B) du_f(t) \\
&\leq \sec^2 a \int_0^1 R(A)!_t R(B) du_f(t) \\
&\leq \sec^2 a (RA)\sigma_f(RB).
\end{aligned}$$

قضیه ۲۵.۵. فرض کنید $A, B \in \mathbb{M}_n$ ماتریس‌های گسترشی باشند به طوریکه $w(A), w(B) \subset S_a$ برای

$0 \leq a < \frac{\pi}{2}$. اگر $f \in m$ به طوری که $f'(1) = t$ به ازای $v \in [0, 1]$ ، آنگاه

$$\cos^2 a R(A!_v B) \leq R(A\sigma_f B) \leq \sec^2 a (RA \nabla_v B).$$

برهان

$$\begin{aligned}
R(A!_v B) &\leq \sec^2 a ((RA!_v)(RB)) \\
&\leq \sec^2 a ((RA)\sigma_f(RB)) \\
&\leq \sec^2 a R(A\sigma_f B).
\end{aligned}$$

نامساوی اول را با استفاده از لم ۱۶.۱، نامساوی دوم را با استفاده از لم ۲.۴۷ و نامساوی آخر را با استفاده از لم ۵.۲۳ بدست آورده‌ایم.

سپس بنا بر گزاره ۵. ۲۴ و لم ۲. ۴۷ داریم

$$\begin{aligned} R(A\sigma_f B) &\leq \sec^2 a(RA)\sigma_f(RB) \\ &\leq \sec^2 a(RA)\nabla_v(RB) \\ &= \sec^2 aR(A\nabla_v B). \end{aligned}$$

لم ۲۶. ۵. فرض کنید $A, B \in \mathbb{M}_n$ گسترشی باشند و Φ یک نگاشت خطی مثبت یکانی باشد. آنگاه داریم،

$$\Phi(RA!_v) \leq R(\Phi(A)!_v \Phi(B))$$

که $v \in (0,1)$.

برهان. با بکار بردن لم‌های ۲. ۴۰، ۲. ۱۶ و قضیه ۲. ۴، داریم

$$\Phi(RA!_v RB) \leq \Phi(RA)!_v \Phi(RB) = R\Phi(A)!_v R\Phi(B) \leq (R\Phi(A)!_v \Phi(B)).$$

درحالتی مشابه لم فوق، برای ماتریس‌های قطعه‌ای داریم:

قضیه ۲۷. ۵. فرض کنید $A, B \in \mathbb{M}_n$ ماتریس‌های گسترشی باشند به طوریکه $w(A), w(B) \subset S_a$ ، $0 \leq a < \frac{\pi}{2}$ و Φ

یک نگاشت خطی مثبت یکانی باشد. اگر $f \in m$ ، آنگاه

$$R\Phi(A\sigma_f B) \leq \sec^2 aR(\Phi(A)\sigma_f \Phi(B)).$$

برهان. با استفاده از تعریف $A\sigma_f B$ داریم

$$\begin{aligned} \cos^2 a R\Phi(A\sigma_f B) &= \Phi(\cos^2 a R(A\sigma_f B)) \\ &\leq \Phi(RA\sigma_f RB) \\ &\leq \Phi(RA)\sigma_f \Phi(RB) \\ &= R\Phi(A)\sigma_f \Phi(B) \\ &\leq R(\Phi(A)\sigma_f \Phi(B)) \end{aligned}$$

نامساوی اول را با استفاده از لم ۲. ۴، نامساوی اول را با استفاده از گزاره ۵. ۲۴، نامساوی دوم را با استفاده از لم ۲. ۴۰، تساوی

دوم را با استفاده از قضیه ۲. ۴ و نامساوی آخر را با استفاده از گزاره ۵. ۲۳ بدست آورده‌ایم.

نتیجه ۲۸. ۵. فرض کنید $A, B \in \mathbb{M}_n$ ماتریس‌های گسترشی باشند به طوریکه $w(A), w(B) \subset S_a$ ، برای

$0 \leq a < \frac{\pi}{2}$ ، اگر $f \in m$ ، آنگاه برای هر بردار یکانی x ، ما داریم

$$R\langle(A\sigma_f B)_{x,x}\rangle \sec^2 a R\langle(A_{x,x})\sigma_f(B_{x,x})\rangle.$$

برهان. اگر قضیه ۵. ۲۷ قرار دهیم $\Phi(A) = \langle x, x \rangle$ ، آنگاه Φ نگاشت خطی مثبت است و داریم

قضیه ۲۹. ۵. فرض کنید $A, B \in \mathbb{M}_n$ ماتریس‌های گسترشی باشند به طوریکه $w(A), w(B) \subset S_a$ ، برای

$0 \leq a < \frac{\pi}{2}$ ، اگر $f \in m$ به طوری که $f'(1) = t$ به ازای $v \in (0,1)$ ، آنگاه به ازای هر نگاشت خطی مثبت یکانی Φ ،

$$R\Phi(A\sigma_f B) \leq \sec^2 a R\Phi(A\nabla + vB).$$

برهان. با استفاده از لم ۲. ۶۴ داریم

$$\begin{aligned} \cos^2 a \Phi(R(A\sigma_f B)) &\leq \Phi(RA\sigma_f RB) \\ &\leq \Phi(RA)\sigma_f \Phi(RB) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \Phi(RA) \nabla_v \Phi(RB) \\ &= R(\Phi(A) \nabla_v \Phi(B)) \\ &= R\Phi(A \nabla_v B), \end{aligned}$$

که نامساوی اول را با استفاده از گزاره ۵. ۲۴ و نامساوی آخر را با استفاده از لم ۲. ۴۷ بدست آورده‌ایم.

گزاره ۵. ۳۰. فرض کنید $f \in m$ و $A \in \mathbb{M}_n$ یک ماتریس گسترشی باشد. آنگاه

$$R(f(A)) \geq f(RA).$$

بنابراین، اگر A گسترشی باشد، آنگاه $f(A)$ هم گسترشی می‌باشد.

برهان. واضح است که بنا بر لم ۲. ۱۶ داریم

$$R(f(A)) = \int_0^1 R(I!_t A) du_f(t) \geq \int_0^1 (I!_t RA) du_f(t) = f(RA).$$

گزاره ۵. ۳۱. فرض کنید $f \in m$ و $A \in \mathbb{M}_n$ به طوریکه $w(A) \subset S_a$ ، برای $0 \leq a < \infty$. آنگاه

$$R(f(A)) \leq \sec^2 a f(RA)$$

برهان. به سادگی بنا بر لم ۲. ۱۶ داریم

$$R(f(A)) = \int_0^1 R(I!_t A) du_f(t) \leq \sec^2 a \int_0^1 R(I!_t RA) du_f(t) \leq \sec^2 a f(RA).$$

قضیه ۵. ۳۲. فرض کنید $f \in m$ ، Φ یک نگاشت خطی مثبت یکانی باشد و $A \in \mathbb{M}_n$ یک ماتریس گسترشی باشد. آنگاه

یک نوع از نامساوی چوبی بصورت زیر برقرار است

$$Rf(\Phi(A)) \geq \cos^2 a R\Phi(f(A)).$$

برهان. فرض کنید A یک ماتریس گسترشی باشد. بنا به تعریف ۲. ۷ واضح است که

$$\begin{aligned} Rf(\Phi(A)) &= R \int_0^1 I!_t \Phi(A) du_f(t) \\ &\geq \int_0^1 I!_t R(\Phi(A)) du_f(t) \\ &= \int_0^1 I!_t \Phi(RA) du_f(t) \\ &= f(\Phi(RA)) \\ &\geq \Phi(f(RA)) \\ &\geq \cos^2 a R\Phi(f(A)), \end{aligned}$$

نامساوی اول را با استفاده از لم ۲. ۱۶۴، نامساوی دوم را با استفاده از قضیه ۴. ۲ و نامساوی آخر را با استفاده از گزاره ۵. ۳۱ بدست آورده‌ایم.

گزاره زیر یک کاربرد از قضیه ۵. ۳۲ می‌باشد.

نتیجه ۵. ۳۳. فرض کنید $A \in \mathbb{M}_n$ ماتریس گسترشی باشد به طوریکه $w(A) \subset S_a$ ، برای $0 \leq a < \frac{\pi}{2}$. آنگاه برای هر

بردار یکانی x

$$R\langle f(A)_{x,x} \rangle \sec^2 a Rf(\langle A_{x,x} \rangle).$$

برهان. اگر در قضیه ۵. ۳۲ قرار دهیم $\Phi(A) = \langle A_{x,x} \rangle$. آنگاه Φ نگاشت خطی مثبت است و داریم

$$\sec^2 aR\Phi(f(A)) \leq Rf(\Phi(A)) \rightarrow R\langle f(A)_{x,x} \rangle \sec^2 aRf(\langle A_{x,x} \rangle).$$

تذکر ۳۴. ۵. وقتی که $f \in m$ و $A, B \in \mathbb{M}_n$ ماتریس‌های مثبتی باشند، آنگاه

$$f(A\nabla_v B) \geq f(A)\nabla_v f(B).$$

قضیه ۳۵. ۵. فرض کنید $A, B \in \mathbb{M}_n$ ماتریس‌های گسترشی باشند به طوریکه $w(A), w(B) \subset S_a$. برای

$$0 \leq a < \frac{\pi}{2} \text{ آنگاه برای هر } v \in (0,1) \text{ و } f \in m$$

$$R(f(A)\nabla_v f(B)) \leq \sec^2 aRf(A\nabla_v B).$$

برهان.

$$Rf(A\nabla_v B) = Rf((1-v)A +$$

$$\geq f((1-v)RA + vRB)$$

$$\geq (1-v)f(RA) + vf(RB)$$

$$\geq (1-v)\cos^2 aRf(A) + v\cos^2 aRf(B)$$

$$= \cos^2 aR((1-v)f(A) + (B)),$$

نامساوی اول را با استفاده از لم ۵. ۳۰ و نامساوی دوم را با استفاده از گزاره ۱. ۴۵ و نامساوی آخر را با استفاده از گزاره ۵. ۳۱

بدست آورده‌ایم. بنابراین داریم

$$Rf(A\nabla_v B) \geq \cos^2 aR(f(A)\nabla_v f(B)).$$

قضیه ۳۶. ۵. فرض کنید $A, B \in \mathbb{M}_n$ ماتریس‌های گسترشی باشند به طوریکه $w(A), w(B) \subset S_a$ ، برای $0 \leq a < \frac{\pi}{2}$

آنگاه برای هر $f \in m$

$$R(f(A)\#f(B)) \leq \sec^4 aR(f(A\nabla B)).$$

برهان. ما داریم

$$\cos^2 aR(f(A)\nabla_v f(B)) \leq Rf(A)\#Rf(B)$$

$$\leq \{\sec^2 af(RA)\}\#\{\sec^2 af(RB)\}$$

$$= \sec^2 af(RA)\#f(RB)$$

$$\leq \sec^2 af(RA\nabla RB)$$

$$\leq \sec^2 aRf(A\nabla B)$$

نامساوی اول را با استفاده از لم ۲. ۱۵ و نامساوی دوم را با استفاده از گزاره ۵. ۳۱، نامساوی سوم را با استفاده از لم ۲. ۴۲ و

نامساوی آخر را با استفاده از گزاره ۵. ۳۰ بدست آورده‌ایم.

بنابراین

$$R(f(A)\#f(B)) \leq \sec^4 aR(f(A\nabla B)).$$

گزاره ۳۷. ۵. فرض کنید $f \in m$ و $A \in \mathbb{M}_n$ ماتریس گسترشی باشد و $\|0\|$ نرم یکانی پایا باشد. آنگاه برای $f \in m$

$$f(\|RA\|) \leq \|Rf(A)\|.$$

برهان. بنا بر گزاره ۵. ۳۰ و لم ۲. ۲۴ برای ماتریس گسترشی A ، ما داریم

$$\|Rf(A)\| \geq \|f(RA)\| \\ \geq f(\|RA\|).$$

گزاره ۳۸.۵. فرض کنید $A \in \mathbb{M}_n$ ماتریس گسترشی باشد طوری که $w(A), w(B) \subset S_a$ برای $0 \leq a < \frac{\pi}{2}$ و $\|0\|_\infty$

را نرم عملگری معمولی در نظر بگیرید. آنگاه برای $f \in m$ داریم،

$$f(\|RA\|_\infty) \leq \|Rf(A)\|_\infty \leq \sec^2 a f(\|RA\|_\infty).$$

برهان. نامساوی سمت چپ را با بکار بردن گزاره ۵.۳۷ به دست می‌آوریم. برای نامساوی سمت راست، با استفاده از گزاره ۵.

۳۱ و لم ۲.۴۸ داریم

$$R\langle f(A)_{x,x} \rangle = \langle Rf(A)_{x,x} \rangle \leq \sec^2 a \langle f(RA)_{x,x} \rangle \leq \sec^2 a f(\langle RA_{x,x} \rangle).$$

واضح است بنا بر گزاره ۵.۳۰ چون A یک ماتریس گسترشی می‌باشد، $f(A)$ نیز گسترشی است. با گرفتن سوپریموم روی

$$\|x\| = 1 \text{ نامساوی زیر را به دست می‌آوریم}$$

$$\begin{aligned} \|Rf(A)\|_\infty &= \sup_{\|x\|=1} \langle Rf(A)_{x,x} \rangle \\ &\leq \sec^2 a \sup_{\|x\|=1} f(\langle RA_{x,x} \rangle) \\ &= \sec^2 a f\left(\sup_{\|x\|=1} \langle RA_{x,x} \rangle\right) \\ &= \sec^2 a f(\|RA\|_\infty). \end{aligned}$$

قضیه ۳۹.۵. فرض کنید $A, B \in \mathbb{M}_n$ ماتریس‌های گسترشی باشند به طوری که $w(A), w(B) \subset S_a$ و $0 \leq a < \frac{\pi}{2}$ و Φ

یک نگاشت خطی مثبت یکانی باشد. آنگاه برای هر نرم یکانی پایا $\|x\| = 1$ و هر $f \in m$ ،

$$\cos^3 a \|\Phi(A\sigma_f B)\| \leq \|\Phi(A)\sigma_f \Phi(B)\|.$$

برهان. با استفاده از قضیه ۵.۲۷ و لم ۲.۱۹ داریم،

$$\begin{aligned} \cos^3 a \|\Phi(A\sigma_f B)\| &\leq \cos^2 a \|R\Phi(A\sigma_f B)\| \\ &\leq \|R\Phi(A)A\nabla_v \Phi(B)\| \\ &\leq \|\Phi(A)\sigma_f \Phi(B)\|. \end{aligned}$$

قضیه ۴۰.۵. فرض کنید $A, B \in \mathbb{M}_n$ ماتریس‌های گسترشی باشند به طوری که $w(A), w(B) \subset S_a$ و $0 \leq a < \frac{\pi}{2}$ و Φ

یک نگاشت خطی مثبت یکانی باشد. آنگاه برای هر نرم یکانی پایا $\|x\| = 1$ و هر $f \in m$ برای $v \in (0,1)$

$$\cos^3 a \|\Phi(A\sigma_f B)\| \leq \|\Phi(A)\nabla_v \Phi(B)\|.$$

برهان. با استفاده از قضیه ۵.۲۹ و لم ۲.۱۹ داریم،

$$\begin{aligned} \cos^3 a \|\Phi(A\sigma_f B)\| &\leq \cos^2 a \|R\Phi(A\sigma_f B)\| \\ &\leq \|R(\Phi(A\sigma_f B))\| \\ &\leq \|R(\Phi(A)\nabla_v \Phi(B))\| \\ &\leq \|\Phi(A)A\nabla_v \Phi(B)\|. \end{aligned}$$

قضیه ۴۱.۵. فرض کنید $A, B \in \mathbb{M}_n$ ماتریس‌های گسترشی باشند به طوری که $w(A), w(B) \subset S_a$ و $0 \leq a < \frac{\pi}{2}$ و Φ

یک نگاشت خطی مثبت یکانی باشد. آنگاه برای هر نرم یکانی پایا $\|x\| = 1$ و هر $f \in m$ ،

$$\|f(A+B)\| \leq \sec^3 a \|f(RA) + f(RB)\|$$

برهان.

$$\begin{aligned} \cos a \|f(A+B)\| &\leq \|Rf(A+B)\| \\ &\leq \sec^2 a \|f(RA+RB)\| \\ &\leq \sec^2 a \|f(RA) + f(RB)\| \\ &\leq \sec^2 a \|Rf(A) + Rf(B)\| \\ &= \sec^2 a \|Rf(A) + f(B)\| \\ &\leq \sec^2 a \|f(A) + f(B)\| \end{aligned}$$

نامساوی اول را با استفاده از لم ۲. ۱۹، نامساوی دوم را با استفاده از ۵. ۳۱، نامساوی سوم را با استفاده از لم ۲. ۴۳ نامساوی چهارم را با استفاده از گزاره ۵. ۳۰ و نامساوی آخر را با استفاده از لم ۲. ۱۹ به دست آورده‌ایم. برای حالت نرم‌دار قضیه ۵. ۳۵ می‌توانیم نامساوی زیر را داشته باشیم.

قضیه ۴۲. ۵. فرض کنید $A, B \in \mathbb{M}_n$ ماتریس‌های گسترشی باشند به طوریکه $w(A), w(B) \subset S_a$ ، $0 \leq a < \frac{\pi}{2}$ و

$$\begin{aligned} \text{آنگاه برای هر نرم یکانی پایا } \|x\| = 1 \text{ و هر } f \in m, \\ \|f(A\nabla_v B)\| \geq \cos^3 a \|f(A)\nabla_v f(B)\|, \\ \text{که } v \in (0,1). \end{aligned}$$

برهان. با استفاده از قضیه ۵. ۳۵ و لم ۲. ۱۹ داریم،

$$\begin{aligned} \|f(A\nabla_v B)\| &\geq \|Rf(A\nabla_v fB)\| \\ &\geq \cos^2 a \|R(f(A)\nabla_v f(B))\| \\ &\geq \cos^3 a \|f(A)\nabla_v f(B)\|. \end{aligned}$$

قضیه ۴۳. ۵. فرض کنید $A, B \in \mathbb{M}_n$ ماتریس‌های گسترشی باشند به طوریکه $w(A), w(B) \subset S_a$ ، $0 \leq a < \frac{\pi}{2}$ و Φ

یک نگاشت خطی مثبت یکانی باشد. آنگاه برای هر نرم یکانی پایا $\|x\| = 1$ و هر $f \in m$ ،

$$\|(A\sigma_f B)\| \geq \cos^3 a (\|f(A)\| \sigma_f \|f(B)\|).$$

برهان. بنابر لم‌های ۲. ۱۹ و ۲. ۴۶، داریم

$$\begin{aligned} \|(A\sigma_f B)\| &\leq \sec a \|R(A\sigma_f B)\| \\ &\leq \sec^3 a \|RA\sigma_f RB\| \\ &\leq \sec^3 a \|RA\| \sigma_f \|RB\| \\ &\leq \sec^3 a \|A\| \sigma_f \|B\| \end{aligned}$$

منابع

1. Abu-omar, F. Kittaneh, Numerical radius inequalities for $n \times n$ operator matrices, Linear Algebra Appl. ۴۶۸(۲۰۱۵), ۱۸-۲۶
2. T. Ando, Concavity of certain maps on positive definite matrices and applications to Hadamard products, Linear Algebra Appl. ۲۶, (۱۹۷۹) ۲۰۳-۲۴۱
3. T. Ando, Majorization and inequalities in matrix theory, Linear Algebra Appl. , ۱۹۹ ۱۷۶۷, (۱۹۹۴).
4. T. Ando, Concavity of certain maps on positive definite matrices and applications to Hadamard products, Linear Algebra Appl. , ۲۶(۱۹۷۹), ۲۰۳-۲۴۱.
5. T. Ando, F. Hiai, Operator log-convex functions and operator means, Math. Ann. , ۳۵۰ ۶۱۱-۶۳۰, (۲۰۱۱).
6. T. Ando, X. Zhan, Norm inequalities related to operator monotone functions, Math. Ann. , ۳۱۵(۱۹۹۹), ۷۷۱-۷۸۰.
7. J. S. Aujla, H. L. Vasudeva, Inequalities involving Hadamard product and operator means, Mathematica Japonica, ۴۲, ۲۶۵-۲۷۲.
8. Y. Bedrani, F. Kittaneh and M. Sababeh, from positive to accretive matrices, ArXiv:۱۱۰۹۰.۲۰۰۲.
9. Y. Bedrani, F. Kittaneh and M. Sababeh, numerical radius of accretive matrices, Linear and Multilinear Algebra. <https://doi.org/10.1080/03081079.2020.1813679>.
10. Y. Bedrani, F. Kittaneh and M. Sababeh, From positive to accretive matrices, ArXiv: ۱۱۰۹۰.۲۰۰۲
11. R. Bhatia, Matrix Analysis, Springer-Verlag, New York (۱۹۹۷)
12. R. Bhatia, Positive Definite Matrices, Princeton University Press, Princeton (۲۰۰۷)
13. R. Bhatia, F. Kittaneh, Notes on matrix arithmetic-geometric mean inequalities, Linear Algebra Appl. , ۳۰۸(۲۰۰۰), ۲۰۳-۲۱۱.
14. D. Choi, T. Tam and P. Zhang, extension of Fischer's inequality, Linear Algebra Appl. ۵۶۹(۲۰۱۹), ۳۱۱-۳۲۲.
15. S. Drury, Principal powers of matrices with positive definite real part, Linear Multilinear Algebra, ۶۳(۲۰۱۵), ۲۹۶-۳۰۱.
16. S. Durury, M. Lin, Singular value inequalities for matrices with numerical ranges in a sector, Oper. Matrices ۸, ۱۱۴۳-۱۱۴۸(۲۰۱۴)
17. T. Furuta, J. Mićić, J. Pečarić and Y. Seo, Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities, Inequalities for Bounded Selfadjoint Operators on a Hilbert Space, Element, Zagreb, ۲۰۰۵.
18. G. Ghazanfari, gruss type inequality for vector-valued functions in Hilbert C^* -modules, App. ۲۰۱۴(۲۰۱۴), Article ID ۱۶.
19. F. Hiai and X. Zhan, Inequalities involving unitarily invariant norms and operator monotone functions, Linear Algebra Appl. , ۳۴۱(۲۰۰۲), ۱۵۱-۱۶۹.

20. R. A. Horn, C. R. Johnson, Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge (۲۰۱۳)
21. F. Kubo, T. Ando, Means of positive linear operators, Math. Ann. , ۲۴۶(۲۰۵- , ۸۰/۱۹۷۹ ۲۲۴.
22. Y. Bedrani, F. Kittaneh and M. Sababeh, From positive to accretive matrices, ArXiv: ۱۱۰۹۰.۲۰۰۲
23. R. Bhatia, Matrix Analysis, Springer-Verlag, New York (۱۹۹۷)
24. R. Bhatia, Positive Definite Matrices, Princeton University Press, Princeton (۲۰۰۷)
25. R. Bhatia, F. Kittaneh, Notes on matrix arithmeticgeometric mean inequalities, Linear Algebra Appl. , ۳۰۸(۲۰۰۰), ۲۰۳۲۱۱.
26. D. Choi, T. Tam and P. Zhang, extension of Fischer's inequality, Linear Algebra Appl. ۵۶۹(۲۰۱۹), ۳۱۱-۳۲۲.
27. S. Drury, Principal powers of matrices with positive definite real part, Linear Multilinear Algebra, ۶۳(۲۰۱۵), ۲۹۶-۳۰۱.
28. S. Durury, M. Lin, Singular value inequalities for matrices with numerical ranges in a sector, Oper. Matrices ۸, ۱۱۴۳-۱۱۴۸(۲۰۱۴)
29. T. Furuta, J. Mi'ci'c Hot, J. Pe cari'c and Y. Seo, MondPe cari'c Method in Operator Inequalities, Inequalities for Bounded Selfadjoint Operators on a Hilbert Space, Element, Zagreb, ۲۰۰۵.
30. G. Ghazanfari, gruss type inequality for vector-valued functions in Hilbert C*-modules, App. ۲۰۱۴(۲۰۱۴), Article ID ۱۶.
31. F. Hiai and X. Zhan, Inequalities involving unitarily invariant norms and operator monotone functions, Linear Algebra Appl. , ۳۴۱(۲۰۰۲), ۱۵۱۱۶۹.
32. R. A. Horn, C. R. Johnson, Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge (۲۰۱۳)
33. F. Kubo, T. Ando, Means of positive linear operators, Math. Ann. , ۲۴۶-۲۰۵- ۸۰/۱۹۷۹ ۲۲۴.
34. F. Kittaneh, M. S. Moslehian and T. Yamazaki, Cartesian decomposition and numerical radius inequalities, Linear Algebra Appl. ۴۷۱(۲۰۱۵), ۴۶-۵۳.
35. M. Lin, Extension of a result of Hanynsworth and Hartfiel, Arch. Math. ۱۰۴, ۱۰۰ ۹۳ (۲۰۱۵)
36. M. Lin, Some inequalities for sector matrices, Oper. Matrices. ۱۰, ۹۱۵-۹۲۱(۲۰۱۶)
37. J. T. Liu, Q. W. Wang More inequalities for sector matrices, Bull. Iran. Math. Soc. (۲۰۱۷) <https://doi.org/10.7.10/s41980-018-0069-y>
38. Y. Mao, Y. Mao, Inequalities for the Hienz Mean of Sector Matrices, Bull. Iran. Math. Soc. (۲۰۲۰). <https://doi.org/10.7.10/s41980-020-00357-X>
39. J. E. pečarić, T. Furuta, J. Mićić Hot, Y. Seo, Mond-pečarić Method in operator inequalities, Element, Zagreb, ۲۰۰۵.

40. M. Raissouli, M. S. Moslehian, S. furuichi, Relative entropy and Tsallis entropy of two accretive operators, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I, ۳۵۵, ۶۸۷-۶۹۳ (۲۰۱۷)
41. M. Shafiei, A. G. Ghazanfari, Numerous refinements of Polya and Heinz operator inequalities. Linear Multilinear Algebra, ۶۶(۴), ۸۵۲-۸۶۰ (۲۰۱۸)
42. F. Tan, H. Chen, Inequalities for sector matrices and positive linear maps, Elec tron. J. Linear Algebra. ۳۵, ۴۱۸-۴۲۳ (۲۰۱۹)
43. F. Tan, A. Xie, On the Logarithmic Mean of Accretive Matrices, Filomat ۳۳(۲۰۱۹) ۴۷۵۲-۴۷۴۷.
44. Yang, F. Lu, Inequalities for the Heinz mean of sector matrices involving linear maps, Annals of Functional Analysis. (۲۰۲۰) <https://doi.org/10.1016/j.afn.2020.100007>.
45. Yang, Y. Ren, Some result of Heron mean and Young's inequalities, J. Inequal. Appl. ۱۷۲(۲۰۱۸) <https://doi.org/10.1186/s13660-018-1765-0>.
46. F. Zhan, Matrix theory, American Mathematical Society (۲۰۱۳)
47. Y. Zhang, Unitarily invariant norm inequalities for accretive-dissipative operators, J. Math. Anal. Appl. ۴۱۲, ۵۶۴-۵۶۹ (۲۰۱۴)
48. F. Zhan, A matrix decomposition and its applications, Linear Multilinear Algebra. (۲۰۱۵) ۶۳, ۲۰۳۳-۲۰۴۲
49. J. Zhao, J. Wu, H. Cao, W. Liao, Operator inequalities involving the arithmetic, geometric, Heinz and Heron means, J. Math. Inequal, vol ۸, ۴(۲۰۱۴), ۷۴۷-۷۵۶.