

دینامیک ناسازگاری کوانتومی برای اتم دو ترازه

اسفندیار فیضی^۱، یحیی اکبری^۲، سمیعا وهاب زاده^۳

^۱ هیئت علمی دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

^۲ هیئت علمی دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

^۳ کارشناسی ارشد فیزیک دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

چکیده

در مدل Jayns-cumming یک اتم دو ترازه با میدان کاواک را در نظر می‌گیریم که اتم دو ترازه در حالت اولیه، حالت تعادل گرمایی است و میدان کاواک در حالت اولیه، n فوتون فوک است. نتیجه‌ای که از این مدل می‌گیریم این است که به رفتارهای نوسانی ناهم خوانی کوانتومی پی می‌بریم و همچنین اگر تعداد فوتون در کاواک افزایش یابد فرکانس نوسانی نیز افزایش می‌یابد. و مدل دیگری که در نظر گرفته ایم مدل Tavis-cumming است که در این مدل دو کاواک داریم که در هر کاواک دو اتم قرار دارد در حالی که در مدل قبلی فقط یک اتم داشتیم که در این مدل علاوه بر، بررسی تحول ناهم خوانی کوانتومی، از طریق تلاقی به بررسی تحول درهمتنیدگی نیز می‌پردازیم. که دو اتم در حالت اولیه، درهمتنیده هستند و دو اتم دیگر در حالت اولیه، در حالت پایه خود قرار دارند و مد کاواک نیز در حالت اولیه در خلأ قرار دارد و نتیجه‌ای که از این مدل می‌گیریم در تحول زمانی ناهم خوانی کوانتومی تنها به صورت حدی صفر می‌شود در حالی که درهمتنیدگی به صورت ناگهانی صفر می‌شود. مدل‌های دیگری از جمله دو اتم که با یک کاواک پراکنده کننده اندرکنش دارند و همچنین یک مد کاواک با N اتم یکسان دو ترازه که ترازهای حالت برانگیخته و حالت پایه است را مطالعه خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی: ناهم خوانی کوانتومی، تحول درهمتنیدگی، کاواک، اتم‌های چند ترازه، مدل Jayns-cumming، مدل Tavis-cumming.

۱- مقدمه

همبستگی کوانتومی و تشخیص آن بسیار مهم و یکی از موضوعات تحقیق است و در عین حال یک چالش تئوری اطلاعات کوانتومی است، همبستگی کوانتومی منبع کلیدی در توزیع حالت‌های کوانتومی^[۱ و ۲]، الحاق کوانتومی^[۳ و ۴]، تمیز حالت‌های وابسته [۵]، آماده سازی حالت کوانتومی از دور^[۶] و غیره است.

اخیراً تلاش‌های بسیاری صورت گرفته است تا سنج‌های مختلف همبستگی های غیر کلاسیکی مورد مطالعه قرار گیرد [۱۳] و ۱۲ و ۱۱ و ۱۰ و ۹ و ۸ و ۷ و ۱]. درهم‌تنیدگی کوانتومی که یکی از رایج ترین نوع از همبستگی های کوانتومی است [۱۴]، بیشتر از همه موارد مطالعه قرار گرفته و کاربردهای فراوانی در ارتباطات و محاسبات کوانتومی دارد [۱۵]، درهم‌تنیدگی ضرورتی که دارد برای انجام کارهای از جمله اطلاعات کوانتومی^۵ و کریپتوگرافی کوانتومی^۶ است.

درهم‌تنیدگی اولین بار بوسیله انشتین^۷، پودولسکی^۸، روسن^۹ [۱۶] و شرودینگر^{۱۰} [۱۷] به عنوان یک پدیده خاص مکانیک کوانتومی توصیف شد که کامل بودن تئوری را مورد پرسش قرار می داد. بعداً بل به این نتیجه رسید که درهم‌تنیدگی را به عنوان سنج آزمایشگاهی مطرح کرد که بوسیله آن بتوان انحراف از مکانیک کلاسیک را تعیین کرد و صرف نظر از مطالعات وسیعی که در زمینه درهم‌تنیدگی کوانتومی صورت گرفته است تئوری مکانیک کوانتومی دسته دیگری از همبستگی کوانتومی را نشان می دهد و بوسیله ناهم خوانی کوانتومی^{۱۱} اندازه گیری می شود.

از میان سیستم های مختلط کوانتومی، سیستم های اتمی از اهمیت فراوانی برخوردار هستند و کاربردهای مختلفی از آنها در پروسه های اطلاعات کوانتومی معرفی شده است [۲۳ و ۲۲]. اندرکنش بین اتم و میدان کاواک می تواند به عنوان منبع مهمی از درهم‌تنیدگی اتم-اتم، اتم-کاواک باشد [۲۵ و ۲۴] و علاوه بر آن مطالعات مهمی در زمینه تحول ناهم خوانی کوانتومی در این سیستم ها صورت گرفته است [۲۶ و ۲۷].

بنابراین ما به مطالعه نحوه تحول ناهم خوانی کوانتومی و درهم‌تنیدگی در این سیستم ها که شامل اندرکنش بین اتم ها و میدان کاواک است می پردازیم و در این زمینه دو مدل ساده و پرکاربرد جی نکامینگ^{۱۲} و توپس کامینگ^{۱۳} را معرفی کرده و به بررسی نحوه اثر میدان، حالت اولیه بر روی تحول درهم‌تنیدگی و ناهم خوانی در این دو مدل می پردازیم.

کیوبیت

بیت مفهوم اصلی محاسبه و اطلاعات کلاسیکی است. با مقایسه این مفهوم برای محاسبه و اطلاعات کوانتومی، بیت کوانتومی یا به اختصار کیوبیت نامیده شده و به کار می رود.

یک بیت کلاسیکی حالت صفر یا یک دارد و کیوبیت می تواند حالت‌های $|0\rangle$ یا $|1\rangle$ داشته باشد.

پس یک کیوبیت به فرم ترکیب خطی حالتها، که برهم نهی نامیده می شود، به صورت:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

می باشد.

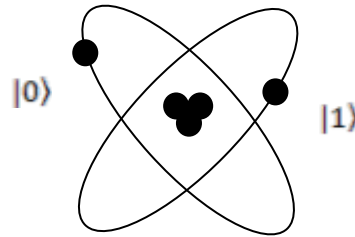
که در آن α و β اعداد مختلطی هستند. پس کیوبیت یک بردار در فضای برداری دو بعدی مختلط می باشند. حالت‌های $|0\rangle$ و $|1\rangle$ حالت‌های پایه محاسباتی نامیده می شود و این پایه ها در این فضای برداری برهم عمودند.

یک بیت کلاسیکی یا مقدار ۰ یا ۱ دارد، ولی نمی توانیم حالت کوانتومی یک کیوبیت را تعیین کنیم، فقط مقدارهای α و β را تعیین می کنیم. یک کیوبیت با نتیجه $|0\rangle$ را با احتمال $|\alpha|^2$ و نتیجه $|1\rangle$ را با احتمال $|\beta|^2$ اندازه گیری می کنیم،

که $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ ، یعنی جمع احتمالها باید برابر یک شود.

حالت یک کیوبیت مانند یک بردار واحد در فضای برداری مختلط دو بعدی است.

یک کیوبیت می تواند قطبش متفاوت فوتون را نشان دهد یا راستای اسپین یک هسته در میدان مغناطیسی یکنواخت باشد و یا در یک مدل اتمی الکترون می تواند حالت‌های پایه یا برانگیخته را داشته باشد تصویر (۱) که می توانیم این حالتها را با $|0\rangle$ یا $|1\rangle$ نشان دهیم.



تصویر (۱): کیوبیت توصیف شده با دو تراز الکترونی یک اتم

توصیف هندسی برای یک کیوبیت می تواند مفید باشد. چون $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ است، می توانیم

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

را به صورت زیر بنویسیم:

$$|\psi\rangle = e^{i\delta} \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right) \quad 1$$

که θ ، φ ، δ اعداد حقیقی می باشند. می توانیم از δ صرفنظر کنیم. پس داریم:

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \quad 2$$

اعداد θ و φ یک نقطه را روی کره سه بعدی واحد تعریف می کنند. این کره، کره بلوخ نامیده می شود که این کره وسیله مفید برای تجسم حالت یک کیوبیت است.

آنتروپی یکی از مفاهیم کلیدی در تئوری اطلاعات کوانتومی است. آنتروپی مقدار عدم قطعیت را که در سیستم وجود دارد را اندازه گیری می کند. در این بخش تعارف اصلی و ویژگی های آنتروپی در تئوری اطلاعات کلاسیکی و کوانتومی مرور می کنیم.

درهمتنیدگی

با فراگیر شدن تئوری اطلاعات کوانتومی، درهمتنیدگی به عنوان منبعی برای انجام کارهایی همچون رمزنگاری کوانتومی [۳۳]، انتقال کوانتومی [۳۴] و همچنین پایه‌ی محاسبات کوانتومی معرفی شد [۳۵]. در سال‌های گذشته پیشرفت‌های چشم‌گیری در زمینه‌ی تولید درهمتنیدگی حاصل شده است، برای مثال شش یا هشت یون، درهمتنیده شده‌اند [۳۶ و ۳۷]، از فوتونها برای نشان دادن درهمتنیدگی بین شش ذره یا ده کیوبیت [۳۸ و ۳۹] استفاده شده است، در هسته‌ی الماس و اسپین، الکترونها هستند که درهمتنیده شده‌اند [۴۰]. از طریق فشردن اسپین، درهمتنیدگی 10^7 اتم در ابر اتمی سرد تولید شده است [۴۱]. عملگرهای درهمتنیده کننده در مقیاس بزرگ برای شبکه‌های ایتیکی در اتم‌های دو ترازه به تعداد 10^5 یافت شده است [۴۲]. تحت تأثیر تکنیک‌های در حال پیشرفت کنترل کوانتومی انتظار می‌رود که در آینده‌ی نزدیک حتی سیستم‌های بزرگ نیز درهمتنیده شوند.

در هر یک از این آزمایشها سئوالات متعددی به ذهن خطور می‌کند چگونه می‌توان از موفقیت تولید درهمتنیدگی اطمینان حاصل کرد؟ چگونه می‌توان حضور درهمتنیدگی را مشاهده کرد؟ چگونه می‌توان مقدار درهمتنیدگی را در آزمایش اندازه گرفت؟ جواب دادن به هر یک از این سئوالات سخت است.

درهمتنیدگی حالت خالص

اگر فرض کنیم که دو سیستم کوانتومی در اختیار ماست یکی از آنها در اختیار آلیس و سیستم دیگر در اختیار باب قرار دارد، حالت‌های فیزیکی سیستم آلیس می‌تواند با حالت‌های در فضای هیلبرت H_A با بُعد d_A توصیف شود و به همین ترتیب سیستم باب H_B با بُعد d_B ، در این صورت سیستم مرکب هر دو بخش بوسیله‌ی برداری در فضای ضرب تانسوری دو زیر فضا تعیین می‌شود.

$$H = H_A \otimes H_B \quad ۳$$

بنابراین هر بردار در $H_A \otimes H_B$ می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{i,j} |a_i\rangle \otimes |b_j\rangle \in H_A \otimes H_B \quad ۴$$

به ماتریس مختلط $C = C_{ij}$ ، $d_A \times d_B$ برای سهولت معمولاً ضرب تانسوری بردارها به صورت نوشته

$$|a\rangle \otimes |b\rangle \equiv |a\rangle |b\rangle \equiv |ab\rangle$$

می‌شود. در اینجا می‌توان جداپذیر بودن و درهمتنیده بودن یک سیستم خالص را معرفی کرد.

تعریف ۱: درهمتنیدگی حالت خالص

یک حالت خالص $|\psi\rangle \in H$ را حالت جداپذیر یا ضربی^{۲۸} می‌گوییم اگر بتوانیم حالت‌های H_B ، $|\Phi^B\rangle$

$|\Phi^A\rangle \in H_A$ را پیدا می‌کنیم به طوری که:

$$|\psi\rangle = |\Phi^A\rangle \otimes |\Phi^B\rangle \quad ۵$$

در غیر این صورت $|\psi\rangle$ را درهمتنیده می‌گویند.

به صورت فیزیکی تعریف حالت جداپذیر به معنی حالت‌هایی است که غیر همبسته هستند، بنابراین یک حالت جداپذیر می‌تواند به صورت عملگرهای محلی و ارتباط کلاسیکی^{۲۹} تهیه شود.

اگر آلیس هر مشاهده پذیر A را اندازه گیری کند و باب مشاهده پذیر B را، احتمال خروجی‌ها مستقل خواهد بود بنابراین خروجی اندازه گیری A به خروجی اندازه گیری B بستگی نخواهد داشت و باب نیز به همین صورت. قبل از بیان تعریف درهم‌تنیدگی حالت آمیخته^{۳۰} یک ابزار مهم برای توصیف درهم‌تنیدگی سیستم‌های دو ذره ای بیان می‌کنیم که تجزیه ی اشمیت^{۳۱} نامیده میشود.

اندازه گیری غیر متعامد

اندازه گیری تصویری یک اندازه گیری ایده آل است. معمولاً خروجی دستگاه اندازه گیری ممکن است نتواند حالت‌های مختلف را به طور کامل از هم جدا کند به این معنا که ممکن است حالت‌های خروجی با هم، هم پوشانی داشته باشند. این هم پوشانی یا در اثر ناکامل بودن دستگاه اندازه گیری و یا در اثر تحول حالتها، درست پس از خروج از یک دستگاه ایده آل بوجود می‌آید همچنین این نوع اندازه گیری ممکن است به این وسیله تولید شود که ما روی دستگاه بزرگتری اندازه گیری تصویری انجام می‌دهیم ولی این نوع اندازه گیری روی دستگاه کوچکتر دیگر یک اندازه گیری تصویری نیست. اندازه گیری غیر متعامد نوع عمومی تری از اندازه گیری است که اینک به تعریف آنها می‌پردازیم.

یک اندازه گیری غیر متعامد تعمیم یافته با مجموعه ای از عملگرهای $\{M_m, m = 1 \dots K\}$ مشخص می‌شود.

که در این شرط:

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = 1 \quad ۶$$

صدق می‌کنند [۷۳ و ۷۴]. اندازه گیری روی حالت ρ با احتمال $P(m) = \text{tr}(M_m \rho M_m^\dagger)$ نتیجه m را بدست می‌دهد. حالت‌هایی که نتیجه m را دارند عبارتند از:

$$\rho_m = \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{tr}(M_m \rho M_m^\dagger)} \quad ۷$$

هرگاه بعد از عبور از دستگاه اندازه گیری این حالتها را از هم جدا نکنیم حالت خروجی با یک آنزامل مخلوط از حالتها یعنی با آنزامل زیر داده می‌شود

$$\rho' = \sum_m p(m) \rho_m = \sum_m M_m \rho M_m^\dagger \quad ۸$$

مفهوم ناهم خوانی کوانتومی

ناهم خوانی کوانتومی میزان اختلاف بین اطلاعات متقابل و بیشینه مقدار اطلاعات متقابل شرطی است. برای تعیین بیشینه اطلاعات متقابل بر روی دسته ی کامل اندازه گیری محلی بیشینه گیری می‌شود. ناهم خوانی کوانتومی A,B متقارن نیست و ناهم خوانی کوانتومی راست در سیستم دو بخشی کوانتومی بین حالت ρ_{AB} در فضای هیلبرت $H^A \otimes H^B$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$D_B(\rho^{AB}) = I(\rho^{AB}) - C_B(\rho^{AB})$$

$$I(\rho^{AB}) = S(\rho^A) + S(\rho^B) - S(\rho^{AB})$$

که $I(\rho^{AB})$ اطلاعات متقابل (مقدار کل همبستگی) بین دو زیر سیستم از حالت ρ_{AB} را معرفی میکند.

$$\rho^A = \text{Tr}_B(\rho^{AB}), \quad \rho^B = \text{Tr}_A(\rho^{AB})$$

ماتریس کاهش یافته برای سیستم های A و B هستند.

$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log_2 \rho)$ آنروپی فان نویمن سیستم در حالت ρ است کمیت $C_B(\rho^{AB})$ به عنوان سنجی ای از میزان

همبستگی کلاسیکی بین دو زیر سیستم A و B در حالت ρ^{AB} معرفی می شود و شامل بیشینه اطلاعات است که یک نفر

می تواند بدست آورد به عنوان مثال در مورد B به وسیله ی اعمال مجموعه ی کامل E_K^B بر روی H^B

$$C_B(\rho^{AB}) = \max_{\{E_K^B\}} [S(\rho^A) - \sum_K p_{A|K} S(\rho_{A|K})]$$

که $\rho_{A|K} = \frac{1}{p_{A|K}} \text{Tr}_B(I_A \otimes E_K^B \rho^{AB})$ حالت بعد از اندازه گیری A بعد از بدست آوردن خروجی K دو زیر سیستم B

است که احتمال آن $p_{A|K} = \text{Tr}[I_A \otimes E_K^B \rho^{AB}]$ است. بیشینه گیری بر روی تمام اندازه گیری های ممکن فان نویمن E_K^B

بر روی زیر سیستم حاصل می شود به طور مشابه ناهم خوانی کوانتومی چپ به صورت زیر تعریف می شود.

$$D_A(\rho^{AB}) = I(\rho^{AB}) - C_A(\rho^{AB})$$

$$C_A(\rho^{AB}) = \max_{\{E_K^A\}} [S(\rho^B) - \sum_K p_{B|K} S(\rho_{B|K})]$$

$$p_{B|K} = \frac{1}{p_{B|K}} \text{Tr}_A[(E_K^A \otimes I_B) \rho^{AB}]$$

حالت بعد از اندازه گیری زیر سیستم B است که اندازه گیری بر روی سیستم A صورت گرفته است و خروجی K از آن با

احتمال $p_{B|K} = \text{Tr}[(E_K^A \otimes I_B) \rho^{AB}]$ صورت می پذیرد.

محاسبه ی ناهم خوانی کوانتومی

ناهم خوانی کوانتومی همیشه غیر منفی است [۵۹] و در سیستمهای کلاسیکی [۶۱]، به مقدار صفر می رسد در حالتی که

$0 = D_A(\rho) = D_B(\rho)$ باشد، سیستم کاملا کلاسیکی است. از این به بعد فقط راجع به ناهم خوانی چپ D_A بحث

می کنیم.

سنجی ناهم خوانی هندسی

تعین ناهم خوانی که با معادله (۲-۳) داده می شود، در حالت کلی نیازمند کمینه گیری عددی است. سنجی های مختلفی از

ناهم خوانی معرفی شده اند [۶۲] و گسترش آنها به سیستم های چند عضوی [۶۳] بیان شده است با این حال بیان های

تحلیلی تنها در موارد خاصی معرفی شده اند [۶۴]. در اینجا ما یک سنجی هندسی^۱

$$D_A^2(\rho) = \min_{X \in \Omega_0} \|\rho - X\|^2$$

را تعریف می کنیم.

که Ω_0 یک مجموعه از حالت‌های با ناهم خوانی صفر را نمایش می‌دهد و رابطه‌ی زیر اندازه‌ی توان دوم در فضای هیلبرت - اشمیت است.

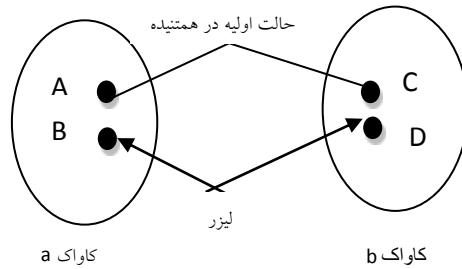
$$\|X - Y\|^2 = \text{Tr} (X - Y)^2$$

مدل تویس-کامینگ برای دو کاواک که در هر کدام دو اتم وجود دارد

در این مرحله به بررسی دو مدل تویس-کامینگ که شامل دو کاواک a,b که هریک شامل دو اتم هستند با یک میدان کلاسیکی چرخشی هستند یک تصویر ساده شده از این مدل در تصویر (۲) نشان داده شده است. اتم‌های A, C از ابتدا در حالت درهمتنیدگی تهیه شده‌اند و اتم‌های B,D در حالت پایه خود هستند، در پایه معادله (۱۶) برای سادگی اینطور فرض می‌کنیم که ثابت کوپلاژ اتم - میدان یکسان هستند و مد کاواک بصورت خلا است برای یک حالت اتمی که تا حدی در همتنیده است و به صورت ترکیبی از حالت‌های بل نوشته می‌شود که آن را با $|\psi_{\pm}\rangle$ نشان می‌دهیم. ما حالت اولیه اتم A,C را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$|\psi_{AC}\rangle = \alpha|\uparrow\downarrow\rangle + \sqrt{1-\alpha^2}|\downarrow\uparrow\rangle$$

۱۶



تصویر (۲): مدل تویس-کامینگ برای دو کاواک که در هر کدام دو اتم وجود دارد

حالت کلی ۴ اتم و ۲ کاواک بصورت زیر داریم:

$$|\psi_0\rangle = \left(\alpha|\uparrow\downarrow\rangle + \sqrt{1-\alpha^2}|\downarrow\uparrow\rangle \right)_{AC} \otimes |\downarrow\downarrow, 00\rangle_{BDab}$$

این رابطه را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$|\psi_0\rangle = \alpha|\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow 00\rangle_{ABaCDb} + \sqrt{1-\alpha^2}|\downarrow\downarrow 0 \uparrow\downarrow 0\rangle_{ABaCDb}$$

(۱۷)

$$|\psi_0\rangle = \alpha|\uparrow\downarrow 0\rangle_{ABa} \otimes |\downarrow\downarrow 0\rangle_{CDb} + \sqrt{1-\alpha^2}|\downarrow\downarrow 0\rangle_{ABa} \otimes |\uparrow\downarrow 0\rangle_{CDb}$$

برای بدست آوردن $|\psi(t)\rangle$ از معادله استفاده می کنیم. در کت حالت $|\psi_0\rangle$ ما دو نوع جمله داریم.
 $C_{\downarrow\downarrow,0}^*$ با توجه به معادله مشتق صفر است.

$$C_{\downarrow\downarrow,0}^* = \alpha(C_{\uparrow\downarrow,n-1} + C_{\downarrow\uparrow,n-1})$$

که چون $n-1 = -1$ می شود و این غیر ممکن است و $C_{\downarrow\downarrow,0}^*$ را از آنجا نوشتیم که حالت $|\downarrow\downarrow\rangle$ در ψ_0 است. با توجه به وجود این کت، سه ضریب زیر

$$C_{\uparrow\downarrow,0}(t), C_{\downarrow\uparrow,0}(t), C_{\downarrow\downarrow,1}(t)$$

در زمان t مشتق آنها با توجه به معادله (۳-۷۶) به $C_{\uparrow\downarrow}(t)$ وابسته می شود و حضور خواهد داشت.

$$\begin{aligned} \psi(t) = & \alpha(C_{\uparrow\downarrow,0}|\uparrow\downarrow,0\rangle + C_{\downarrow\downarrow,1}|\downarrow\downarrow,1\rangle + C_{\downarrow\uparrow,0}|\downarrow\uparrow,0\rangle)_{ABa} \otimes \\ & |\downarrow\downarrow,0\rangle_{CDb} + \sqrt{1-\alpha^2}|\downarrow\downarrow,0\rangle_{ABa} \otimes (C_{\uparrow\downarrow,0}|\uparrow\downarrow,0\rangle + \\ & C_{\downarrow\downarrow,1}|\downarrow\downarrow,1\rangle)C_{\downarrow\uparrow,0}|\downarrow\uparrow,0\rangle_{CDb} \end{aligned} \quad (18)$$

طبق معادله $\rho = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ را تشکیل می دهیم.

$$\begin{aligned} \rho = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| = & \alpha^2 \left(C_{\uparrow\downarrow,0}^2 |\uparrow\downarrow,0\rangle\langle\uparrow\downarrow,0| + C_{\downarrow\downarrow,1}^* |\uparrow\downarrow,0\rangle\langle\downarrow\downarrow,1| + \right. \\ & C_{\uparrow\downarrow,0} C_{\downarrow\uparrow,0}^* |\uparrow\downarrow,0\rangle\langle\downarrow\uparrow,0| + C_{\downarrow\downarrow,1}^2 |\downarrow\downarrow,1\rangle\langle\downarrow\downarrow,1| + C_{\downarrow\downarrow,1} C_{\uparrow\downarrow,0}^* |\downarrow\downarrow,1\rangle\langle\uparrow\downarrow,0| \\ & \left. + C_{\downarrow\downarrow,1} C_{\downarrow\uparrow,0}^* |\downarrow\downarrow,1\rangle\langle\downarrow\uparrow,0| \right) \otimes |\downarrow\downarrow,0\rangle\langle\downarrow\downarrow,0| + \\ & \left\{ \alpha\sqrt{1-\alpha^2} \left(C_{\uparrow\downarrow,0} |\uparrow\downarrow,0\rangle + C_{\downarrow\downarrow,1} |\downarrow\downarrow,1\rangle + C_{\downarrow\uparrow,0} |\downarrow\uparrow,0\rangle \right) \langle\downarrow\downarrow,0| \otimes \right. \\ & \left. |\downarrow\downarrow,0\rangle \left(C_{\uparrow\downarrow,0} |\uparrow\downarrow,0\rangle + C_{\downarrow\downarrow,1} |\downarrow\downarrow,1\rangle + C_{\downarrow\uparrow,0} |\downarrow\uparrow,0\rangle \right) \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & + (1-\alpha)^2 |\downarrow\downarrow,0\rangle\langle\downarrow\downarrow,0| \otimes \left\{ C_{\uparrow\downarrow,0}^2 |\uparrow\downarrow,0\rangle\langle\uparrow\downarrow,0| + C_{\uparrow\downarrow,0} C_{\downarrow\downarrow,0}^* |\uparrow\downarrow,0\rangle\langle\downarrow\downarrow,0| \right. \\ & \left. + C_{\uparrow\downarrow,0} C_{\downarrow\downarrow,0}^* |\uparrow\downarrow,0\rangle\langle\downarrow\downarrow,0| + C_{\downarrow\downarrow,1} C_{\downarrow\uparrow,0}^* |\downarrow\downarrow,1\rangle\langle\downarrow\uparrow,0| + C_{\downarrow\uparrow,0}^2 |\downarrow\uparrow,0\rangle\langle\downarrow\uparrow,0| \right. \\ & \left. + C_{\downarrow\uparrow,0} C_{\uparrow\downarrow,0}^* |\downarrow\uparrow,0\rangle\langle\uparrow\downarrow,0| + C_{\downarrow\uparrow,0} C_{\downarrow\downarrow,0}^* |\downarrow\uparrow,0\rangle\langle\downarrow\downarrow,1| \right\} + \\ & \alpha\sqrt{1-\alpha^2} \left(|\downarrow\downarrow,0\rangle\langle\downarrow\downarrow,0| \left(C_{\uparrow\downarrow,0}^* |\uparrow\downarrow,0\rangle + C_{\downarrow\downarrow,1}^* |\downarrow\downarrow,0\rangle + C_{\downarrow\uparrow,0}^* |\downarrow\uparrow,0\rangle \right) \otimes \right. \\ & \left. \left(C_{\uparrow\downarrow,0} |\uparrow\downarrow,0\rangle + C_{\downarrow\downarrow,1} |\downarrow\downarrow,0\rangle + C_{\downarrow\uparrow,0} |\downarrow\uparrow,0\rangle \right) \langle\downarrow\downarrow,0| \right) \end{aligned}$$

برای تریس گرفتن ρ روی $ACab$ ، $\langle\uparrow\uparrow 00|_{ACab} \rho |\uparrow\uparrow 00\rangle_{ACab}$ را در جملات زیر ضرب کرده ایم و بعد جملات را با هم جمع کرده ایم و عبارت بالا بدست آمده است.

$$\begin{aligned} \text{tr} : & \langle\uparrow\uparrow 00|_{ACab} \rho |\uparrow\uparrow 00\rangle_{ACab} \\ & + \langle\uparrow\downarrow 00|_{ACab} \rho |\uparrow\downarrow 00\rangle_{ACab} \\ & + \langle\downarrow\uparrow 00|_{ACab} \rho |\downarrow\uparrow 00\rangle_{ACab} \\ & + \langle\downarrow\downarrow 00|_{ACab} \rho |\downarrow\downarrow 00\rangle_{ACab} \\ \rho_{BD} = & \alpha^2 |C_{\uparrow\downarrow,0}^2 \langle\downarrow\downarrow|\downarrow\downarrow\rangle + \alpha^2 |C_{\downarrow\downarrow,1}^2 \langle\downarrow\downarrow|\downarrow\downarrow\rangle + \alpha^2 |C_{\downarrow\uparrow,0}^2 \langle\uparrow\downarrow|\uparrow\downarrow\rangle \\ & + \alpha\sqrt{1-\alpha^2} C_{\downarrow\uparrow,0} C_{\uparrow\downarrow,0} |\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + (1-\alpha^2) \left(|C_{\uparrow\downarrow,0}^2 \langle\downarrow\downarrow|\downarrow\downarrow\rangle + |C_{\downarrow\downarrow,1}^2 \langle\downarrow\downarrow|\downarrow\downarrow\rangle + |C_{\downarrow\uparrow,0}^2 \langle\uparrow\downarrow|\downarrow\uparrow\rangle \right) + \\ & \alpha\sqrt{1-\alpha^2} |\downarrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| C_{\downarrow\uparrow,0}^* C_{\downarrow\downarrow,0} \end{aligned}$$

اگر ماتریس چگالی کلی را tr جزئی گرفته یعنی از $|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ ، tr جزئی بگیریم روی اتم های A و C و کلاواک ها می توان ماتریس زیر را بدست آورد.

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}$$

$$\rho_{11}^{\Psi}(t) = \rho_{14}^{\Psi}(t) = \rho_{41}^{\Psi}(t) = 0$$

$$\rho_{22}^{\Psi}(t) = \alpha^2 \left| C_{\downarrow\uparrow,0} \right|^2$$

ماتریس X شکلی است. که:

$$\rho_{33}^{\Psi}(t) = (1-\alpha)^2 \left| C_{\uparrow\downarrow,0} \right|^2$$

$$\rho_{23}^{\Psi}(t) = \rho_{32}^{\Psi*}(t) = \alpha\sqrt{1-\alpha^2} \left| C_{\uparrow\downarrow,0} \right|^2 \quad (20)$$

$$\rho_{44}^{\Psi}(t) = \left| C_{\downarrow\uparrow,0} \right|^2 + \left| C_{\downarrow\downarrow,1} \right|^2$$

دینامیک ناهم خوانی کوانتومی و درهم‌تنیدگی

در این بخش به بررسی دینامیک ناهم خوانی کوانتومی می پردازیم و آن را با دینامیک درهم‌تنیدگی برای یک سیستم دو بخشی ρ^{AB} همبستگی کلی را می توان از طریق اطلاعات متقابل بدست آورد

$$I(\rho^{AB}) = S(\rho^A) + S(\rho^B) - S(\rho^{AB})$$

که ρ^A و ρ^B بیانگر ماتریس چگالی بخش A و B هستند.

$$S(\rho^{AB}) = \sum_{j=1}^4 \lambda_j \log \lambda_j \quad (91-3)$$

آنتروپی فان نویمن است برای ساختارهای X شکل که در بالا ادعا کرد که مسئله این مقاله نیز طبق (۹۰-۳) شکل X است. همانطور که در معادله (۷۳-۳) آمده است که حالت اولیه ما بصورت

$$|\psi_0\rangle = \alpha |\uparrow\downarrow,0\rangle_{ABa} \otimes |\downarrow\downarrow,0\rangle_{CDb} + \sqrt{1-\alpha^2} |\downarrow\downarrow,0\rangle_{ABa} \otimes |\uparrow\downarrow,0\rangle_{CDb}$$

در $t=0$ این دو ضرایب مخالف صفر هستند $C_{\downarrow\downarrow,0}, C_{\uparrow\downarrow,0}$ حال این دو ضرایب چون در $t=0$ غیر صفر هستند مولد ضرابی خواهند شد، برای زمان های دیگر برای اینکه بفهمیم این ضرایب غیر صفر در زمان های دیگر به چه چیزی تبدیل می شوند یا خود چگونه تغییر می کنند به معادله

$$(84-3), (87-3) \text{ نگاه می کنیم پس این دو ضرایب به دو نحو باید مطالعه شوند:}$$

۱- مشتق آنها. اگر C را داریم C^* را حساب کرده و C در زمان جدید محاسبه می شود.

۲- ممکن است مشتق یک C با اندیس غیر از این دو، C غیر صفر، وابستگی به این ضرایب غیر صفر داشته باشد.

باتوجه به معادله (۷۶-۳) قسمت دوم این رابطه، چون مشتق غیر صفر است پس در زمانهای دیگر

نیز $C_{\uparrow\downarrow,0}$ را خواهیم داشت که تغییر می کند چون مشتق آن مخالف صفر است.

اما در مورد $C_{ii,0}$ چون مشتق آن برابر است. با توجه به معادله (۳-۷۵) از رابطه سومش داریم:

$$\begin{aligned} \dot{C}_{\downarrow\downarrow,0} &= \dot{C}_{\uparrow\downarrow,-1} + \dot{C}_{\downarrow\uparrow,-1} \\ \dot{C}_{\downarrow\downarrow,0} &= 0 \end{aligned}$$

چون C_{-1} بی معنی است پس $C_{ii,0}$ برابر با صفر است و در طول زمان ضرایب ثابت می ماند و تغییر نمی کند. از طرفی چون ما در زمان صفر این دو عبارت را داریم $C_{ii,0}$ ، $C_{\uparrow\downarrow,0}$ در معادله (۳-۷۴) به دنبال این می گردیم که این جملات باعث می شود چه جمله های جدیدی غیر از خودشان درست شود یعنی مشتق چه جمله های دیگر به این دو جمله وابسته است از معادله (۳-۷۹) داریم:

$$\dot{C}_{\uparrow\downarrow,1} = \dot{C}_{\downarrow\uparrow,1} = -i\chi\sqrt{n} e^{-i\Delta t} (C_{\uparrow\downarrow,0} = C_{\downarrow\uparrow,0})$$

که باز همچون از ابتدا این عبارت را داریم پس در ادامه مشتق $C_{ii,1}$ مخالف صفر است و چون مشتق آن مخالف صفر است در زمان t غیر صفر می شود.

$$C_{ii,1}(t) \neq 0$$

حال ویژه مقادارها را به این صورت تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1}{2} \left[(\rho_{11} + \rho_{44}) \pm \sqrt{(\rho_{11} - \rho_{44})^2 + 4|\rho_{14}|^2} \right] \\ \lambda_{3,4} &= \frac{1}{2} \left[(\rho_{22} + \rho_{33}) \pm \sqrt{(\rho_{22} - \rho_{33})^2 + 4|\rho_{23}|^2} \right] \end{aligned} \quad (۳-۹۲)$$

از طرفی کمیت ρ^{AB} که با توجه به بیشترین اطلاعاتی که با استفاده از اندازه گیری بر روی یکی از زیر سیستم ها بدست می آید (در اینجا B) و همبستگی کلاسیکی به صورت زیر تعریف می شود:

$$C(\rho^{AB}) = \sup_{\{B_k\}} \left[S(\rho^A) - \sum_k p_k S(\rho_k) \right] \quad (۳-۹۳)$$

که $\{B_k\}$ توصیف کننده پروژکتورهای یک بعدی برای زیر سیستم B است و

$$\begin{aligned} \rho_k &= \frac{(I \otimes B_k) \rho^{AB} (I \otimes B_k)}{\rho_k} \\ \rho_k &= \text{tr} \left[(I \otimes B_k) \rho^{AB} (I \otimes B_k) \right] \end{aligned}$$

و همچنین ناهم خوانی کوانتومی به صورت زیر تعریف می شود.

$$D(\rho^{AB}) = I(\rho^{AB}) - C(\rho^{AB}) \quad (۳-۹۴)$$

برای مطالعه درهمتنیدگی سیستم که با ماتریس چگالی های $\rho^{\Psi_{BD}}$, $\rho^{\Phi_{BD}}$ توصیف می شود از رابطه زیر استفاده می کنیم که همان تلاقی است.

$$C(\rho) = \max\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\} \quad (95-3)$$

که از λ_i ها ویژه مقادیر هستند که به صورت کاهشی مرتب شده اند.

$$\rho(\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y) \quad (96-3)$$

که ρ^* بیانگر همیوگ مختلط ρ است و σ_y ماتریس پائولی است که به صورت زیر است.

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

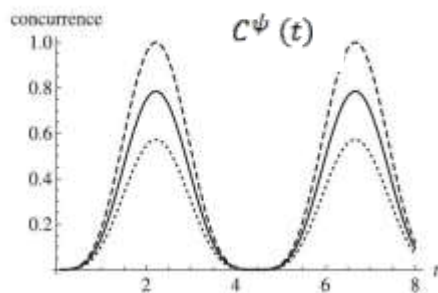
لم: تلاقی برای حالت های جداپذیر برابر صفر است $C=0$ و برای حالت بیشینه مقدار درهمتنیدگی برابر یک است. تلاقی را می توان از رابطه زیر بدست آورد.

$$C(t) = 2 \max\left\{0, \left| \rho_{14}(t) \right| - \sqrt{\rho_{22}(t) \rho_{33}(t)}, \left| \rho_{23}(t) \right| - \sqrt{\rho_{11}(t) \rho_{44}(t)} \right\} \quad (97-3)$$

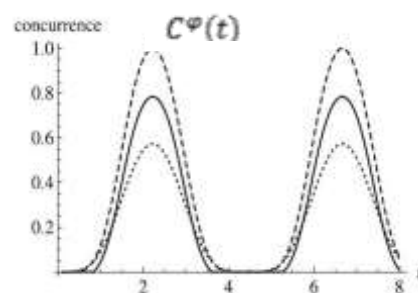
برای هر کدام از حالت های Ψ, Φ از معادلات (۹۰-۳) جاگذاری می کنیم

به طور واضح درهمتنیدگی دو اتم D, B به حالت های اولیه C, A بستگی دارد به عبارت دیگر $C(t)$ بستگی به پارامتر دارد که حالت اولیه سیستم A را مشخص می کند.

در نمودار (۶-۳) تلاقی برای دو حالت $C^{\Psi}(t)$ و $C^{\Phi}(t)$ ترسیم شده اند بر حسب زمان t که سه مقدار مختلف در نظر گرفته شده است تا وابستگی به α مشخص شود. در شکل (3a) دینامیک درهمتنیدگی به صورت نوسانگر دوره ای نشان داده شده است مقدار تلاقی همه جا غیر صفر است مگر برای بعضی مقادیر گسته زمان دوره نوسان درهمتنیدگی به α بستگی ندارد و با تغییر α تغییر نمی کند.



(3a)

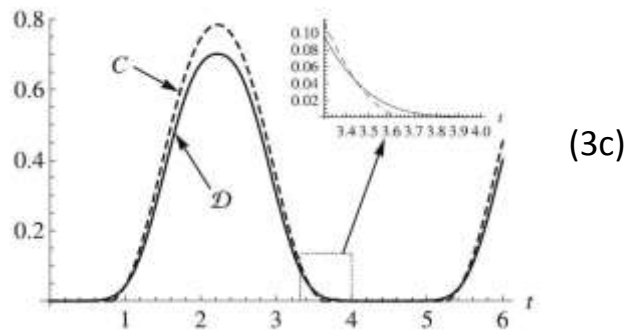


(3b)

نمودار (۱): تلاقی دو حالت $C^{\Psi}(t)$ و $C^{\Phi}(t)$

از نمودار بالا در قسمت (3b) می توان دید که در حالت $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \alpha = 0.3, \varphi(0)$ در همتنیدگی ناگهان ناپدید می شود (دیده نمی شود) اما در حالت $\alpha = 0.9$ در همتنیدگی بین D, B یکدفعه صفر می شود برای مدتی نیز صفر باقی می ماند به عبارت دیگر اثر ناپدید شدن ناگهانی در همتنیدگی در سیستم حاضر وجود دارد پس می توان نتیجه گرفت که اثر ناپدید شدن ناگهانی در همتنیدگی به مقدار اولیه سیستم های A, C بستگی دارد برای مقایسه بین دینامیک در همتنیدگی و دینامیک ناهم خوانی شکل تلاقی و ناهم خوانی کوانتومی را رسم کرده ایم.

در نمودار (۲) قسمت (3c) می توان دید حالت اولیه $\varphi(0)$ در نظر گرفته شده است. می توان دید که ناهم خوانی کوانتومی به طوری متفاوت از تلاقی رفتار می کند. در مورد $\alpha = 0.9$ در همتنیدگی یکدفعه از بین می رود در حالی که ناهم خوانی کوانتومی به صورت حدی صفر می شود باید گفت که مقایسه کمیته بین مقدار ناهم خوانی کوانتومی و در همتنیدگی بدون معنی است زیرا سنج همزمان ناهم خوانی کوانتومی و در همتنیدگی وجود ندارد.

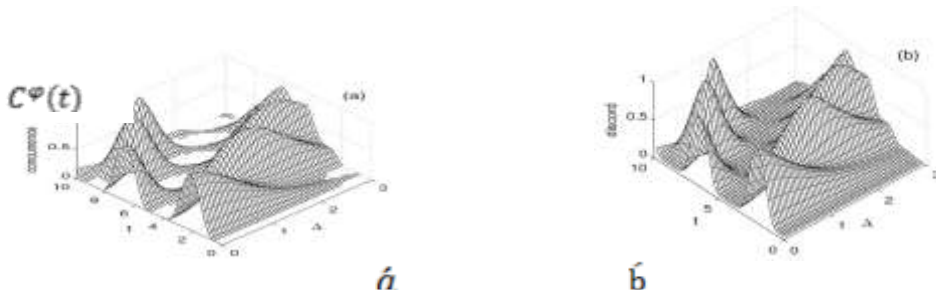


نمودار (۲): رفتار ناهم خوانی کوانتومی با تلاقی در حالت $\varphi(0)$

در بخش $C^{\varphi}(t)$ در نمودار ۳ تلاقی a و ناهم خوانی کوانتومی در بخش b برای اتم های B, D رسم شده است

که این ترسیم برحسب پارامترهای Δ, t صورت گرفته است همانطور که در شکل همانطور که در شکل \hat{a} نشان داده شده است دوره ناپدید شدن کامل در همتنیدگی به دنبال یکبار تولید در همتنیدگی می آید.

در شکل \hat{b} مشخص است که ناهم خوانی کوانتومی به بیشینه مقدار خود می رسد و این مقدار از بیشینه ناهمخوانی کوانتومی، بستگی دارد به Δ و t با مقایسه شکل \hat{a} و \hat{b} می توان فهمید که ناهم خوانی کوانتومی پایدارتر از در همتنیدگی است.



نمودار (۳): تلاقی $C^{\varphi}(t)$ و ناهم خوانی کوانتومی برای اتم های B و D

ناهم خوانی کوانتومی برای مدل دوتایی توپس-کامینگ با کاواک پراکنده کننده

در این بخش به بررسی ناهم خوانی کوانتومی برای مدل دوتایی توپس-کامینگ همراه با کاواک پراکنده کننده می پردازیم اگر اتم ها بوسیله یک میدان کلاسیکی قوی چرخانده شوند، $\chi \gg |\Delta|$ همیلتونی موثر برای این مدل همراه با کاواک پراکنده کننده به صورت زیر توصیف می شود.

$$V_{\text{eff}} = \Lambda \left[\sum_{j=A,B} \left(|\uparrow\rangle_{jj} \langle \uparrow| a a^+ - |\downarrow\rangle_{jj} \langle \downarrow| a^+ a \right) + \left(\rho_A^- \rho_B^+ + \rho_A^+ \rho_B^- \right) \right] \quad (98-3)$$

که $\Omega = \frac{x^2}{\Delta}$ ثابت موثر کوپلاژ است جمله اول همیلتونی میدان میزان سختی را نسبت به جابجایی استراک نشان می دهد در حالی که در جمله دوم فرمی مشابه با اندرکنش دوقطبی-دوقطبی است بین اتم ها معادله اصلی که بتوان تحول سیستم را بیان کند به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \rho' &= -i[V_{\text{eff},\rho'}] + D \rho' = -i[V_{\text{eff},\rho'}] + K(2a\rho' a^+ - a^+ a \rho' - \rho' a^+ a) \\ &= -i[V, \rho'] + K(2M - R - L)\rho' \end{aligned} \quad (99-3)$$

که ρ' ماتریس چگالی سیستم اتم-میدان است و M, R, L بوسیله عبارت زیر تعریف می شود.

$$\begin{aligned} M\rho' &= (a.a^+)\rho' = a\rho'a^+ \\ R\rho' &= (a^+ a.)\rho' = a^+ a\rho' \\ L\rho' &= (.a^+ a)\rho' = \rho'a^+ a \end{aligned} \quad (100-3)$$

این روابط نشان داده می شوند که در روابط جابجایی صدق می کنند:

$$\begin{aligned} [(a.), (a.^+)] &= 1 \\ [(a.), (a.^+)] &= -1 \end{aligned}$$

همچنین این اپراتورها در روابط زیر صدق می کنند.

$$[R, M] = [L, M] = M \quad \text{و} \quad [R, L] = 0$$

$$(\cdot a)o = oa, (a.^+)o = a^+ o, (0a^+)o = oa^+ (a_0)o = a_0$$

با استفاده از جبر سوپر عملگرها و فرض اینکه در حالت اولیه، میدان در حالت واهمدوسی است با دامنه ξ معادله اصلی (۹۴-۳) را حل می کنیم که ماتریس های چگالی کاهش یافته به صورت معادله زیر است.

$$\rho_{14}(t) = \rho_{14}(0) \exp \left\{ -2i\Lambda i + \frac{2i\Lambda|\zeta|^2}{k + 2i\Lambda} \left[e^{-2(2i\Lambda+k)t} - 1 \right] \right\}$$

$$\rho_{24}(t) = \frac{x_1 + y_1}{2} \rho_{24}(0) + \frac{x_1 - y_1}{2} \rho_{34}(0)$$

$$\rho_{34}(t) = \frac{x_1 - y_1}{2} \rho_{24}(0) + \frac{x_1 + y_1}{2} \rho_{34}(0) \tag{۱۰۱-۳}$$

$$\rho_{21}(t) = \frac{x_2 + y_2}{2} \rho_{21}(0) + \frac{x_1 - y_1}{2} \rho_{31}(0)$$

$$\rho_{31}(t) = \frac{x_2 + y_2}{2} \rho_{21}(0) + \frac{x_1 - y_1}{2} \rho_{31}(0)$$

$$\rho_{22}(t) = z_+(0) + z_-(0) \cos(2\Lambda t) - z_2(0) \sin(2\Lambda t)$$

$$\rho_{23}(t) = z_1(0) + iz_2(0) \cos(\Lambda t) + iz_-(0) \sin(2\Lambda t)$$

$$\rho_{ij} = \rho_{ji}^+ \quad \sum_i \rho_{ii} = 0$$

$$x_1 = \exp \left[-2i\Lambda i - |\zeta|^2 + \frac{|\zeta|^2}{2} (e^{2kt} + e^{-2kt}) - \frac{i\Lambda|\zeta|^2}{k + i\Omega} (e^{2kt} - e^{-2kt}) \right]$$

$$y_1 = x_1 e^{2i\Lambda i}$$

$$x_2 = y_y^*$$

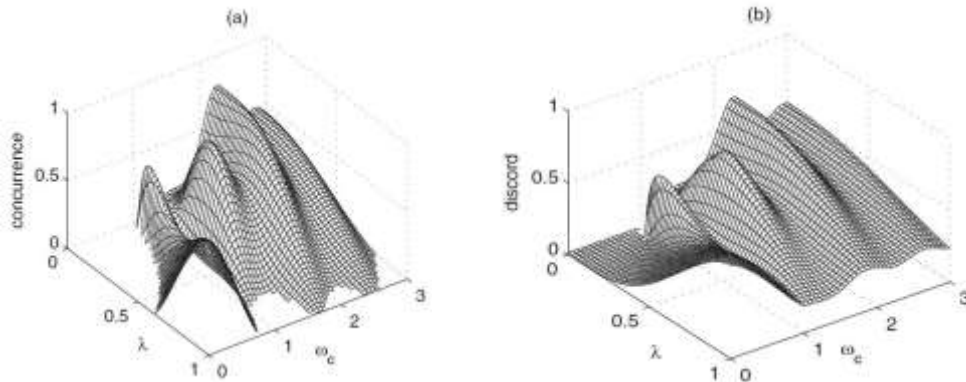
$$y_2 = x_1^* \tag{۱۰۲-۳}$$

$$z_{\pm} = (\rho_{22}(0) \pm \rho_{33}(0)) / 2$$

$$\rho_{23}(0) = z_1(0) + iz_2(0)$$

در این مرحله مدل دوتایی، مدل را با کاواک پراکنده کننده بررسی می کنیم با استفاده از روش هایی که در مرجع [۷۰] معرفی شده می توانیم ماتریس چگالی کاهش یافته هر دو اتم را به دست آورد.

در نمودار (۴) تلاقی $C^{\varphi}(t)$ بخش (a) و ناهمخوانی کوانتومی (در بخش b) از اتم B,D نمایش داده شده اند که تابعی از پارامترهای k,t هستند.



نمودار (۴): بررسی مدل دوتایی با کاواک پراکنده کننده

و اتم های A,C در حالت اولیه زیر

$$\rho_{11}^{\varphi}(t) = \alpha^2 \left| c_{\downarrow\uparrow,0} \right|^4$$

$$\rho_{22}^{\varphi}(t) = \rho_{33}^{\varphi}(t) = \alpha^2 \left| c_{\uparrow\downarrow,0} \right|^2 \left| c_{\downarrow\uparrow,0} \right|^2$$

$$\rho_{44}^{\varphi}(t) = \alpha^2 \left| c_{\uparrow\downarrow,0} \right|^4 + 1 - \alpha^2$$

$$\rho_{14}^{\varphi}(t) = \rho_{41}^{\varphi*}(t) = \alpha \sqrt{1 - \alpha^2} c_{\downarrow\uparrow,0}^2$$

قرار دارند. مشاهده شده است که با وجود اینکه مرگ ناگهانی در هم‌تنیدگی وجود دارد ناهم‌خوانی کوانتومی تنها در زمان‌های گسسته مشاهده می‌شود که صفر می‌شود. این موضوع بیان‌کننده این مطلب است که ناهم‌خوانی کوانتومی قوی‌تر از درهم‌تنیدگی است در یک کاواک پراکنده‌کننده ناهم‌خوانی کوانتومی و در هم‌تنیدگی هردو تابعی هستند که نسبت به تغییرات k حساس هستند از بین رفتن در هم‌تنیدگی با افزایش k سریعتر رخ می‌دهد این مدل به صورت آزمایشگاهی می‌تواند در سیستم‌های اپتیکی سنتی مشاهده شود در رویه‌ای که در منبع [۷۱] استفاده شده برای مشاهده‌ی درهم‌تنیدگی بین دو اتم ریدبرگ که از یک کاواک میکرو و غیرپایدار عبور می‌کند می‌تواند کاندیدای مناسبی باشد که شامل مدل تویس-کامینگ است که هامیلتونی تعیین شده در همین مقاله کار شده است.

منابع:

- [1] M. Piani, P. Horodecki, and R. Horodecki, Phys. Rev. Lett. 100, 090502 (2008)
- [2] M. Piani, M. Christandl, C. E. Mora, and P. Horodecki, Phys. Rev. Lett. 102, 250503(2009).
- [3] V. Madhok and A. Datta, Phys. Rev. A 83, 032323 (2011).
- [4] D. Cavacanti, L. Aolita, S. Boixo, K. Modi, M. Piani, and A. Winter, Phys. Rev. A 83,032324 (2011).
- [5] L. Roa, J. C. Retamal, and M. Alid-Vaccarezza, Phys. Rev. Lett. 107, 080401 (2011).
- [6] B. Dakić, Y. Lipp, X. Ma, M. Ringbauer, S. Kropatschek, S. Barz, T. Paterek, V. Vedral, A. Zeilinger, C. Brukner, and P. Walther, arXiv:1203.1629.
- [7] M. Piani, S. Gharibian, G. Adesso, J. Calsamiglia, P. Horodecki, and A. Winter, Phys. Rev. Lett. 106, 220403 (2011).
- [8] A. Streltsov, H. Kampermann, and D. Bruss, Phys. Rev. Lett. 107, 170502 (2011).
- [9] G. L. Giorgi, B. Bellomo, F. Galve, and R. Zambrini, Phys. Rev. Lett. 107, 190501 (2011).
- [10] M. Gessner and H-P. Breuer, Phys. Rev. Lett. 107, 180402 (2011).
- [11] D. Z. Rossatto, T. Werlang, E. I. Duzzioni, and C. J. Villas-Boas, Phys. Rev. Lett. 107,153601 (2011).
- [12] S. Luo and N. Li, Phys. Rev. A 84, 052309 (2011).
- [13] T. Zhou, J. Cui, and G. L. Long, Phys. Rev. A 84, 062105 (2011).
- [14] J. Cui and H. Fan, J. Phys. A 43, 045305 (2010).
- [15] R. Horodecki P. Horodecki, M. Horodecki and K. Horodecki, Rev. Mod. Phys. 81, 865(2009).
- [16] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2000).
- [17] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? Phys. Rev. 47 (1935) 777.
- [18] E. Schrödinger, Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik, Die Naturwissenschaften 23 (1935) 807_812; 823_828; 844_849.
- [19] X. B. Wang, T. Hiroshima, A. Tomita, M. Hayashi, Quantum information with Gaussian states, Phys. Rep. 448 (2007) 1.
- [20] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, K. Horodecki, Quantum entanglement, 2007. quant-ph/0702225
- [21] M. B. Plenio, S. Virmani, An introduction to entanglement measures, Quantum Inf. Comput. 7 (2007) 1.
- [22] B. M. Terhal, Detecting quantum entanglement, J. Theor. Comput. Sci. 287 (2002) 313.
- [23] L You, X X Yi, and X H Su, Quantum logic between atoms inside a high-Q optical cavity, Phys. Rev. A 67,032308 (2003).
- [24] A Bige, Dissipation-assisted quantum gates with cold trapped ions, Phys. Rev. A 67, 020301 (2003).

- [25] D. Leibfried, E. Knill, S. Seidelin, J. Britton, R. B. Blakestad, J. Chiaverini, D. B. Hume, W. M. Itano, J. D. Jost, C. Langer, R. Ozeri, R. Reichle, D. J. Wineland, Creation of a six-atom `Schrödinger cat' state, *Nature* 438 (2005) 639
- [26] P. Neumann, N. Mizuochi, F. Rempp, P. Hemmer, H. Watanabe, S. Yamasaki, V. Jacques, T. Gaebel, F. Jelezko, J. Wrachtrup, Entanglement among single spins in diamond, *Science* 320 (2008) 1326.
- [27] M. Genovese, Research on hidden variable theories: A review of recent progresses, *Phys. Rep.* 413 (2005) 319.
- [28] R. Blatt, D. Wineland, Entangled states of trapped atomic ions, *Nature* 453 (2008) 1008.
- [29] Quantum Computation and quantum information Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang
- [30] Mathematics of Quantum Computation 2002 by Chapman and Hall / C R C Rane K. Brylinski and Gongchen
- [31] Quantum Approach to information Stig Stenholm – Kalle – Antti Suominen A J. H N Willey and Sons, Inc, Publication
- [32] Quantum Computation and Quantum information. Michael A. Nielsen and Isacc L. Chuang. Cambridge University Press.
- [33] A. K. Ekert, Quantum cryptography based on Bell's theorem, *Phys. Rev. Lett.* 67 (1991) 661.
- [34] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, W. K. Wootters, Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein_Podolsky_Rosen channels, *Phys. Rev. Lett.* 70 (1993) 1895.
- [35] R. Raussendorf, H. J. Briegel, A one-way quantum computer, *Phys Rev. Lett.* 86 (2001) 5188
- [36] D. Leibfried, E. Knill, S. Seidelin, J. Britton, R. B. Blakestad, J. Chiaverini, D. B. Hume, W. M. Itano, J. D. Jost, C. Langer, R. Ozeri, R. Reichle, D. J. Wineland, Creation of a six-atom `Schrödinger cat' state, *Nature* 438 (2005) 639.
- [37] H. Häffner, W. Hänsel, C. F. Roos, J. Benhelm, D. Chek-al-kar, M. Chwalla, T. Körber, U. D. Rapol, M. Riebe, P. O. Schmidt, C. Becher, O. Gühne, W. Dür, R. Blatt, Scalable multi-particle entanglement of trapped ions, *Nature* 438 (2005) 643.
- [38] C. -Y. Lu, X. -Q. Zhou, O. Gühne, W. -B. Gao, J. Zhang, Z. -S. Yuan, A. Goebel, T. Yang, J. -W. Pan, Experimental entanglement of six photons in graph states, *Nature Phys.* 3 (2007) 91.
- [39] W. -B. Gao, C. -Y. Lu, X. -C. Yao, P. Xu, O. Gühne, A. Goebel, Y. -A. Chen, C. -Z. Peng, Z. -B. Chen, J. -Pan, Experimental demonstration of a hyper-entangled ten-qubit Schrödinger cat state, 2008. arXiv:0809. 4277.
- [40] P. Neumann, N. Mizuochi, F. Rempp, P. Hemmer, H. Watanabe, S. Yamasaki, V. Jacques, T. Gaebel, F. Jelezko, J. Wrachtrup, Entanglement among single spins in diamond, *Science* 320 (2008) 1326.

- [41] J. Hald, J. L. Sørensen, C. Schori, E. S. Polzik, Spin squeezed atoms: A macroscopic entangled ensemble created by light, *Phys. Rev. Lett.* 83 (1999) 1319.
- [42] O. Mandel, M. Greiner, A. Widera, T. Rom, T. Hänsch, I. Bloch, Controlled collisions for multi-particle entanglement of optically trapped atoms, *Nature* 425 (2003) 937.
- [43] S. L. Braunstein, P. van Loock, Quantum information with continuous variables, *Rev. Modern Phys.* 77 (2005) 513
- [44] A. Peres, *Quantum Theory: Concepts and Methods*, Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [45] D. Bruy, G. Leuchs (Eds.), *Lectures on Quantum Information*, Wiley-VCH, 2006.
- [46] V. Vedral, *Introduction to Quantum Information Science*, Oxford University Press, 2007.
- [47] Quantum-Information-Theory Wintersemester 2000/2001 Prof. M. Lewenstein Institute for Theoretical Physics University of Hannover March 27, 2006 Release 1. 04
- [48] A. Peres, Separability criterion for density matrices, *Phys. Rev. Lett.* 77 (1996) 1413.
- [49] Institut für Quantenoptik und Quanteninformation, Österreichische Akademie der Wissenschaften, Technikerstraße 21A, A-6020 Innsbruck, Austria Institut für theoretische Physik, Universität Innsbruck, Technikerstraße 25, A-6020 Innsbruck, Austria
- [50] M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, Separability of mixed states: Necessary and sufficient conditions, *Phys. Lett. A* 223 (1996) 1.
- [51] S. Yu, N. -L. Liu, Entanglement detection by local orthogonal observables, *Phys. Rev. Lett.* 95 (2005) 150504.
- [52] K. Życzkowski, P. Horodecki, A. Sanpera, M. Lewenstein, On the volume of the set of mixed entangled states, *Phys. Rev. A* 58 (1998) 883.
- [53] G. Vidal, R. F. Werner, A computable measure of entanglement, *Phys. Rev. A* 65 (2002) 032314.
- [54] O. Rudolph, Further results on the cross norm criterion for separability, *Quantum Inf. Process.* 4 (2005) 219. See also quant-ph/0202121.
- [55] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, W. K. Wootters, Mixed-state entanglement and quantum error correction, *Phys. Rev. A* 54 (1996) 3824.
- [56] S. Hill, W. K. Wootters, Entanglement of a pair of quantum bits, *Phys. Rev. Lett.* 78 (1997) 5022.
- [57] P. Rungta, V. Bužek, C. M. Caves, M. Hillery, G. J. Milburn, Universal state inversion and concurrence in arbitrary dimensions, *Phys. Rev. A* 64 (2001)
- [58] K. Życzkowski, P. Horodecki, A. Sanpera, M. Lewenstein, On the volume of the set of mixed entangled states, *Phys. Rev. A* 58 (1998) 883.
- [59] G. Vidal, R. F. Werner, A computable measure of entanglement, *Phys. Rev. A* 65 (2002) 032314.
- [60] Preskill, *Quantum information (lecture notes)*. www.theory.caltech.edu/preskill/ph299
- [61] L. Roa, J. C. Retamal, and M. Alid-Vaccarezza, *Phys. Rev. Lett.* 107, 080401 (2011).
- [62] B. Dakić, Y. Lipp, X. Ma, M. Ringbauer, S. Kropatschek, S. Barz, T. Paterek, V. Vedral, A. Zeilinger, C. Brukner, and P. Walther, arXiv:1203.1629.
- [63] R. Dillenschneider et al., arXiv.org: 0803.4067 (2008)
- [64] M. S. Sarandy, *Phys. Rev. A*. 80, 022108 (2009).

- [65] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information(Cambridge University Press, Cambridge, England, 2000)
- [66] از جزوه ی آقای دکتر وحید کریم پور
- [67] F W Cummings, Stimulated Emission of Radiation in a Single Mode, Phys. Rev. 140, A1051(1965).
- [68] V Vedral, Classical Correlations and Entanglement in Quantum Measurements, Phys. Rev. Lett. 90,050401(2003).
- [69] B Dakic, V Vedral and C Brukner, Necessary and sufficient condition for non-zero quantum discord, arXiv:quant-ph/1004. 0190
- [64] D Cavalcanti, L Aolita, S Boixo, K Modi, M Piani and A Winter, Operational interpretations of quantumdiscord, arXiv: quant-ph/1008. 3205v
- [65] M Ali, A R P Rau and G Alber, Quantum discord for two-qubit X states, Phys. Rev. A 81, 042105 (2010).
- [66] V Madhok and A Datta, Interpreting quantum discord through quantum state merging, arXiv: quantph/1008. 4135
- [67] V Madhok and A Datta, Interpreting quantum discord through quantum state merging, arXiv: quantph/1008. 4135
- [68] T. E Tessier, I. H. Deutesch, A. Delgado, I. Fuentes-Guridi, Phys. Rev. A 68, 062316 (2003)
- [69] Y. X. Liu, C. P. Sun, F. Nori, Phys. Rev. A 74, 052321 (2006) B. Bellomo, R. Lo Franco, G. Compagno, Rev. A 77, 032342 (2008)]70[
- [71] S. Osnaghi, P. Bertet, A. Auffeves, P. Maioli, M. Brune, J. M. Raimond, S. Haroche, Phys. Rev. Lett. 87, 037902 (2001)
- [72] F. F. Fanchini et al Phys. Rev. A. 81, 052107 (2010)
- [73] Denes Petz. Quantum Information Theory and Quantum Statistics. Springer: Berlin. (2008)
- [74] Denes Petz. Efficient quantum tomography needs complementary and symmetricmeasurements, Reports on Mathematical physics, Volum,69 Issue, 2 April, 2012 Pages 177-161