مطالعات علوم کاربردی در مهندسی

دوره ۸، شماره ۱، بهار ۱۴۰۱

صفحات ۳۶۸-۳۵۵

Online ISSN: 2476-4507

Print ISSN: 2538-2055

www.irijournals.com

برآورد میانگین جامعه با حضور بی‌پاسخی با استفاده از طرح نمونه‌گیری دومرحله‌ای

ابوالفضل سعیدی فر [۱]، میترا منتظرلطف[۲]، پرستو منتظر لطف[۳]

[۱] هیئت‌علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک

[۲] کارشناسی ارشد آمار اقتصاد دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک

[۳] دکترای آمار دانشگاه تهران شمال

چکیده

در این مقاله به اثر و خطای بی‌پاسخی در طرح‌های پژوهشی و به‌ویژه نمونه‌گیری پرداخته شد. روش‌های مختلف برخورد با این موضوع را برشمردیم و با استفاده از روش‌های پیشرفته استنباط آماری و بهره‌مندی از روش‌های برآوردیابی، مفاهیم بهینه‌سازی برآورگردها و انتخاب مناسب‌ترین و به عبارتی بهترین برآوردگر با حضور بی‌پاسخی برای تعدیل اثر بی‌پاسخی و تحلیل میزان کارایی آن‌ها ارائه گردید. آنچه مسلم است انتخاب روش علمی برخورد با مقوله بی‌پاسخی در طرح‌های تحقیقاتی و عملیاتی است چراکه این موضوع در اکثریت مطالعات میدانی اجتناب‌ناپذیر بوده و محقق می‌بایست با استفاده از تکنیک‌های پیشرفته آماری نسبت به بهترین استراتژی در جهت کاهش اثر بی‌پاسخی اقدام نماید.

واژه‌های کلیدی: طرح نمونه‌گیری دومرحله‌ای، نمونه‌گیری، بی‌پاسخی

۱- مقدمه

در این مقاله به برآورد میانگین جامعه با استفاده از اطلاعات یک متغیر کمکی با حضور بی پاسخی اشاره می شود. برخی نسبت‌ها و ضرایب اصلاحی و برآوردگرهای رگرسیونی در نمونه‌گیری دوگانه پیشنهاد شده و ویژگیهای آن‌ها بررسی می‌شود. در ادامه نشان می دهیم با استفاده از تقریب درجه اول، برآوردگرهای مبتنی بر مقادیر بهینه برآورد شده، واریانس برابری با برآوردگرهای بهینه دارد. در این مطالعه به بررسی کارایی برآورگردها و وضعیت اریبی آن ها نیز پرداخته می شود. یادآور می گردد مفاهیم پایه ای علم آمار شامل نمونه‌گیری، روش‌های برآوردیابی، مفاهیم بهینه‌سازی و بی‌پاسخی و همچنین ویژگی های برآوردگرها از پیش نیازهای این تحقیق خواهد بود.

نمونه‌گیری و برخی از انواع آن

پس از انتخاب موضوع تحقیق و بیان مسئله, یکی از تصمیمیات مهمی که در پیش روی هر پژوهشگری قرار دارد انتخاب نمونه است, نمونه ای که باید نماینده جامعه ای باشد که پژوهشگر قصد تعمیم یافته های تحقیق خود به آن جامعه را دارد.

نمونه‌گیری فرآیند انتخاب مشاهده ها و تعمیم نتایج مشاهده به کل جمعیت است.

از دلایل اصلی نمونه‌گیری به موارد زیر اشاره نمود:

- صرفه جویی در وقت، انرژی و هزینه.
- جلوگیری از افزایش احتمال اشتباهات از قبیل اشتباهات پرسشگر و نیافتن پاسخگویان.
- نتیجه نمونه‌گیری به شرط رعایت اصول و ضوابط آن، با نتایج همه پرسی (سرشماری) یکی است.

همانطور که می دانیم هر چه حجم یا اندازه نمونه بزرگتر باشد میزان اشتباهات در نتیجه گیری کم می‌شود و بر عکس هر چه تعداد نمونه محدود باشد مقدار اشتباهات زیادتر است. بنابراین زمانی که محقق سطح بالاتری از اطمینان یا معنی دار بودن آماری را ملاک ارزیابی اطلاعات تحقیق خود قرار می دهد لازم است حجم نمونه او بزرگتر انتخاب شود.

لذا اگر هر عضو در جامعه مادر دقیقاً مشابه عضو دیگر باشد آنگاه انتخاب نمونه ای با حجم یک عضو هم کافی است. حجم نمونه باید به اندازه ای باشد که نتایج حاصل عیناً با نتایج همان مطالعه در جامعه ای که نمونه از آن انتخاب شده است برابر باشد.

بی‌پاسخی، خطای ناشی از آن و تکنیک‌های مواجهه با بی‌پاسخی

بی‌پاسخی خطایی ناشی از عدم مشاهده، مثل خطای پوشش است هرچند که خطای بی‌پاسخی با خطای پوشش تفاوت دارد. زیرا بی‌پاسخی بازتاب تلاش ی ناموفق در به دست آوردن اطلاعات مورد نظر از یک واحد واجد شرایط است، در حالی که خطای پوشش آن گونه که می دانیم بازتاب عدم توفیق در گنجاندن واحد نمونه به طور یکتا در چارچوب است.

به طور کلی، دو نوع خطای اصلی بی‌پاسخی وجود دارد: بی‌پاسخی واحد و بی‌پاسخی سؤال. بی‌پاسخی واحد هنگامی رخ می دهد که هیچ پاسخی از واحد نمونه دریافت نشود اعم از این که واحد نمونه خانوار، فردی از افراد خانوار و یا یک کارگاه کسب و کار باشد. علی رغم اعمال بیش ترین تلاش ها در طی گردآوری داده ها احتمال بروز سطوحی از ب ی پاسخی همواره وجود دارد. برای حداقل کردن تأثیر خطای بی‌پاسخی واحد غالبًا از فنون توزین استفاده می‌شود؛ اما به هر حال، تا جایی که فرض های مورد نظر به طور کامل تامین نشوند از قبیل این که مث ً لا واحدهای نمونه به طور تصادفی از قلم نیفتند، خطای

بی‌پاسخی ممکن است هنوز هم بر براوردهای حاصل از داده ها تأثیر بگذارد. بی‌پاسخی واحد تا حدودی به دلیل استفاده ی فراوان از نرخ پاسخگویی آمارگیری به عنوان نماگری کلی برای کیفیت داده ها مورد توجه بسیار زیادی بوده است. در واقع این نرخ تنها شاخص کمّی موجود یا مورد استفاده ی وس یع است. با وجود این نرخ بی‌پاسخی تنها معیاری برای اریبی بالقوه در یک براورد آمارگیری در اثر خطا های بی‌پاسخی در آمارگیری است. میزان واقعی اریبی بی‌پاسخی نه تنها تابعی از نرخ بی‌پاسخی است بلکه تابعی از میزان تفاوت پاسخگویان و غیر پاسخگویان نسبت به متغیر مور د نظر آمارگیری نیز هست. بنابراین، تأثیر خطاهای بی‌پاسخی را به ندرت می توان مستقیمًا م شاهده کرد زیرا به دست آوردن اطلاعات از واحدهای بدون پاسخ یا درمورد این واحدها کار دشواری است. با وجود این وش ها و پژوهش هایی خاص وجود دارند که به وسیله ی آن ها می توان اطلاعاتی درباره ی میزان تأثیر خطای بی‌پاسخی بر یک براورد به دست آورد. به دلیل دشواری اندازه گیری مقدار خطای بی‌پاسخی یش تر تلاش ها به حداقل کردن رویداد این خطا هدایت شده است. در نتیجه، اقداماتی که در فرایند گردآوری داده ها برای حداقل کردن بی‌پاسخی دنبال می‌شود نیز می تواند به عنوان نماگری برای کیفیت داده ها در نظر گرفته شود. بی‌پاسخی سؤال هنگامی روی می دهد که واحد پاسخ دهنده یک یا چند سؤال ر ا در پرسشنامه ی آمارگیری تکمیل نکرده باشد و یا پاسخ های ب ه دست آمده غیرقابل استفاده باشند. بی‌پاسخی سؤال نیز بر کیفیت داده ها تأثیر می گذارد. برای بهبود نرخ های پاسخ سؤال خصوصًا در مواقعی که اقلام آماری مهم مطرح است، می توان از تماس مجدد یا روش‌های تعاقبی استفاده کرد. معیارهای این تلاش ها نیز می توانند به عنوان نماگرهایی از کیفیت داده ها تلقی شوند. برای بقیه ی بی‌پاسخی های سؤال می توان روش‌های جانهی را مورد استفاده قرار داد تا بی‌پاسخی سؤال جبران شود. این روش ها داده های گمشده را به طور کامل جبران نمی کنند و به هر حال سطوح نامشخصی از خطای ناشی از بی‌پاسخی در داده ها باقی خواهد ماند. توجه به این نکته مهم است که بی‌پاسخی واحد و سؤال کاملاً متمایز نیستند. اگر پرسشنامه یآمارگیری با پاسخ هایی فقط برای سؤال ها، ولی نه سؤال های مهم و اساسی، بازگردد، می توان آن را به عنوان بی پاسخ واحد تلقی کرد. علاوه بر این، در یک آمارگیری پستی نیز، پرسشنامه ای که بدون پاسخ به هرگونه سؤال بازگردانده می‌شود ممکن است به عنوان واحد بدون پاسخ تلقی شود حتی اگر فقدان اطلاعات در پرسشنامه امکان تشخیص این که واحد نمونه داخل چارچوب بوده است یا خارج از چارچوب را غیر ممکن سازد.

برخی تکنیک‌های آماری مهم در برخورد با بی‌پاسخی وجـود دارد کـه در ادامـه بـه بررسـی آن خـواهیم پرداخـت. معمـولاً در پیمایش ها مواردی پیش می‌آید که برخی از پاسخگویان به برخی از سوالات پاسخ ندهند اینگونه اطلاعات بـه عنـوان اطلاعـات گمشده محسوب می گردند که تقریباً با این مشکل در هر پیمایشی مواجه هستیم. گاهی به خاطر بی دقتی پرسشـگران پـیش می‌آید به طوری که پرسشگر فراموش می‌کند برخی سوالات را بپرسد. گاهی نیز پاسخگویان تمایلی به جواب دادن به برخـی از سوالات را ندارند. مشکل داده‌های گمشده را می‌توان به دو حالت کلی تقسیم کرد. حالت اول زمانی است که داده‌ها به صـورتی تصادفی گم شده باشند. مثلاً پاسخگویان برخی سوالات را ندیده باشند و یا پرسشگران یـک یـا چنـد سـوال را از قلـم انداختـه باشند. حالت دوم وقتی پیش می‌آید که پاسخگو با قصد و نیت از پاسخ دادن به سوال یا سوالاتی خودداری ورزیده باشد.

تعدیل اثر بی‌پاسخی با استفاده از نمونه‌گیری دومرحله‌ای(دو گانه)

از آنجا که دربسیاری از نظرسنجی های به عمل آمده از افراد جامعه، اطلاعات کاملی از همه عناصر جامعه بدست نمی آید بدست آوردن برآوردهایی برای شاخص های آن جامعه مبتنی بر چنین داده هایی شاید گمراه کننده باشد. به‌ویژه زمانی که

پاسخ های متفاوتی برای مقادیر گمشده وجود داشته باشد معمولا منجر به حصول برآورد اریب برای جامعه می گردد. هانسن[۱] و هارویتز[۲] (۱۹۴۶) تکنیک ساده ای تحت نمونه‌گیری با لحاظ بی‌پاسخی به منظور تعدیل اثر مقادیر گمشده در طرح نظرسنجی الکترونیکی ترسیم نمودند.

در بررسی های نمونه ای برای برآورد پارامترهای جامعه مانند میانگین، مجموع و نسبت‌ها گاهی اوقات کارشناسان به منظور افزایش دقت برآوردگرها از اطلاعات کمکی استفاده می کنند. زمانی که میانگین جامعه $\overline{\mathrm{X}}$ از متغیر کمکی X با حضور بی‌پاسخی تعیین شده است برآوردکردن میانگین جامعه $\overline{\mathrm{Y}}$ از متغیر مورد مطالعه y موضوعی است که توسط ککران[۳](۱۹۷۷)، رائو[۴] (۱۹۸۷-۱۹۸۶)، خاره[۵] و اسریوستاوا[۶] (۱۹۹۷-۱۹۹۳) مورد بررسی قرار گرفته است.

برآوردگرهای پیشنهادی

برآوردگرهای میانگین جامعه $\overline{\mathrm{Y}}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$t_d^{(r)} = \bar{y}^* \left(\frac{\bar{x}'}{\bar{x}^*}\right)\left(\frac{\bar{x}'}{\bar{x}}\right) \qquad ۱.۲$$

$$t_d^{(p)} = \bar{y}^* \left(\frac{\bar{x}^*}{\bar{x}'}\right)\left(\frac{\bar{x}}{\bar{x}'}\right) \qquad ۲.۲$$

$$t_{(\alpha_1)}^{(\alpha 2)} = \bar{y}^* \left(\frac{\bar{x}}{\bar{x}^*}\right)^{\alpha 1}\left(\frac{\bar{x}'}{\bar{x}}\right)^{\alpha 2} \qquad ۳.۲$$

$$t_d = \bar{y}^* + d_1\left(\bar{x} - \bar{x}^*\right) + d_2\left(\bar{x}' - \bar{x}\right) \qquad ۴.۲$$

که در آن $\alpha_i' s$ و $d_i' s$ $(i = 1, 2)$ مقادیرثابت مناسب معین هستند. یادآور می گردد که برآوردگر پیشنهادی $t_{\alpha_1}^{\alpha_2}$ با بهره‌مندی از روش نمایی حاصل شده است. (اسریوستاوا ۱۹۶۷)

برای $\alpha_1 = 1$ و $\alpha_2 = 2$، برآوردگر $t_{\alpha_1}^{\alpha_2} \to t_d^r$ و برای $\alpha_1 = -1$ و $\alpha_2 = -2$، برآوردگر $t_{\alpha_1}^{\alpha_2} \to t_d^p$.

برای بدست آوردن میزان اریبی و واریانس برآوردگرهای $t_{\alpha_1}^{\alpha_2}$، t_d^r، t_d^p و t_d روابط زیر را در نظر می گیریم:

$$\bar{y}^* = \bar{Y} + \varepsilon_0^*, \quad \bar{x}^* = \bar{X} + \varepsilon_1^*, \quad \bar{x} = \bar{X} + \varepsilon_1, \quad \bar{x}' = \bar{X} + \varepsilon_1',$$

و به علاوه:

$$E\left(\varepsilon_0^*\right) = E\left(\varepsilon_1^*\right) = E\left(\varepsilon_1\right) = E\left(\varepsilon_1'\right) = 0$$

---

[1] *Hansen*

[2] *Hurwitz*

[3] *Cochran*

[4] *Rao*

[5] *Khare*

[6] *Srivastava*

دوره ۸، شماره ۱، بهار ۱۴۰۱، صفحات ۳۶۸-۳۵۵

و همچنین:

$$E\left(\varepsilon_0^{*2}\right)=\left(\frac{1-f}{n}\right)S_y^2+\frac{W_2\left(k-1\right)}{n}S_{y2}^2$$
۲. ۵

$$E\left(\varepsilon_1^{*2}\right)=\left(\frac{1-f}{n}\right)S_x^2+\frac{W_2\left(k-1\right)}{n}S_{x2}^2$$
۲. ۶

$$E\left(\varepsilon_1^{2}\right)=\left(\frac{1-f}{n}\right)S_x^2$$
$$E\left(\varepsilon_1'^{2}\right)=\left(\frac{1-f'}{n'}\right)S_x^2$$
۲. ۷

$$E\left(\varepsilon_0^*\varepsilon_1^*\right)=\left(\frac{1-f}{n}\right)S_{xy}+\frac{W_2\left(k-1\right)}{n}S_{xy(2)}$$
۲. ۸

$$E\left(\varepsilon_0^*\varepsilon_1\right)=\left(\frac{1-f}{n}\right)S_{xy}$$
۲. ۹

$$E\left(\varepsilon_0^*\varepsilon_1'\right)=\left(\frac{1-f'}{n'}\right)S_{xy}$$
$$E\left(\varepsilon_1^*\varepsilon_1\right)=\left(\frac{1-f}{n}\right)S_x^2$$
۲. ۱۰

$$E\left(\varepsilon_1^*\varepsilon_1'\right)=\left(\frac{1-f'}{n'}\right)S_x^2$$
۲. ۱۱

$$E\left(\varepsilon_1\varepsilon_1'\right)=\left(\frac{1-f'}{n'}\right)S_x^2$$
۲. ۱۲

اکنون با جایگذاری $t_{\alpha_1}^{\alpha_2}$، t_d^r، t_d^p و t_d به جای $\varepsilon's$ خواهیم داشت:

$$t_d^{(r)}=\bar{Y}\left(1+\frac{\varepsilon_0^*}{\bar{Y}}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_1^*}{\bar{X}}\right)^{-1}\left(1+\frac{\varepsilon_1}{\bar{X}}\right)^{-1}\left(1+\frac{\varepsilon_1'}{\bar{X}}\right)^{2}$$
$$t_d^{(p)}=\bar{Y}\left(1+\frac{\varepsilon_0^*}{\bar{Y}}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_1^*}{\bar{X}}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_1}{\bar{X}}\right)\left(1+\frac{\varepsilon_1'}{\bar{X}}\right)^{-2}$$
۲. ۱۵

$$t_{(\alpha_1)}^{(\alpha_2)}=t_d=\bar{Y}+\varepsilon_0^*+d_1\left(\varepsilon_1-\varepsilon_1^*\right)+d_2\left(\varepsilon_1'-\varepsilon_1\right)^{:)}\left(1+\frac{\varepsilon_1'}{\bar{X}}\right)^{\alpha_2}$$
۲. ۱۸

در این قسمت فرض می کنیم $\left|\frac{\varepsilon_1^*}{\bar{X}}\right|<1$، $\left|\frac{\varepsilon_1}{\bar{X}}\right|<1$ و $\left|\frac{\varepsilon_1'}{\bar{X}}\right|<1$. بنابراین سمت راست عبارات ۲. ۱۵، ۲. ۱۶ و ۲. ۱۷ قابل تعمیم بوده و با بسط و ساده کردن این سه عبارت و حذف عبارات شامل $\varepsilon's$ خواهیم داشت:

$$t_d^{(r)}=\bar{Y}\left(1+\frac{\varepsilon_0^*}{\bar{Y}}-\frac{\varepsilon_1^*}{\bar{X}}-\frac{\varepsilon_1^*\varepsilon_0^*}{\bar{X}\bar{Y}}+\frac{\varepsilon_1^{*2}}{\bar{X}^2}-\frac{\varepsilon_1}{\bar{X}}-\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0^*}{\bar{X}\bar{Y}}+\frac{\varepsilon_1\varepsilon_1^*}{\bar{X}^2}+\frac{\varepsilon_1^2}{\bar{X}^2}+\frac{2\varepsilon_1'}{\bar{X}}\right.$$
$$\left.+\frac{2\varepsilon_0^*\varepsilon_1'}{\bar{X}\bar{Y}}-\frac{2\varepsilon_1^*\varepsilon_1'}{\bar{X}^2}-\frac{2\varepsilon_1\varepsilon_1'}{\bar{X}^2}+\frac{\varepsilon_1'^2}{\bar{X}^2}\right)$$
$$t_d^{(p)}=\bar{Y}\left(1+\frac{\varepsilon_0^*}{\bar{Y}}+\frac{\varepsilon_1^*}{\bar{X}}+\frac{\varepsilon_1^*\varepsilon_0^*}{\bar{X}\bar{Y}}+\frac{\varepsilon_1}{\bar{X}}+\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0^*}{\bar{X}\bar{Y}}\right.$$
$$\left.+\frac{\varepsilon_1\varepsilon_1^*}{\bar{X}^2}-\frac{2\varepsilon_1'}{\bar{X}}-\frac{2\varepsilon_0^*\varepsilon_1'}{\bar{X}\bar{Y}}-\frac{2\varepsilon_1^*\varepsilon_1'}{\bar{X}^2}-\frac{2\varepsilon_1\varepsilon_1'}{\bar{X}^2}+\frac{3\varepsilon_1'^2}{\bar{X}^2}\right)$$
۲. ۱۹

$$t_{(\alpha_1)}^{(\alpha_2)}=\bar{Y}\left\{1+\frac{\varepsilon_0^*}{\bar{Y}}-\frac{\alpha_1\varepsilon_1^*}{\bar{X}}-\frac{\alpha_1\varepsilon_1^*\varepsilon_0^*}{\bar{X}\bar{Y}}+\frac{\alpha_1\left(\alpha_1+1\right)}{2}\frac{\varepsilon_1^{*2}}{\bar{X}^2}+\frac{\left(\alpha_1-\alpha_2\right)\varepsilon_1}{\bar{X}}\right.$$
$$+\frac{\left(\alpha_1-\alpha_2\right)\varepsilon_1\varepsilon_0^*}{\bar{X}\bar{Y}}-\frac{\alpha_1\left(\alpha_1-\alpha_2\right)\varepsilon_1\varepsilon_1^*}{\bar{X}^2}+\frac{\left(\alpha_1-\alpha_2\right)\left(\alpha_1-1\right)}{2}\frac{\varepsilon_1^2}{\bar{X}^2}+\frac{\alpha_2\varepsilon}{\bar{X}}$$
$$\left.+\frac{\alpha_2\varepsilon_0^*\varepsilon_1'}{\bar{X}\bar{Y}}-\frac{\alpha_1\alpha_2\varepsilon_1^*\varepsilon_1'}{\bar{X}^2}+\frac{\alpha_2\left(\alpha_1-\alpha_2\right)\varepsilon_1\varepsilon_1'}{\bar{X}^2}+\frac{\alpha_2\left(\alpha_2+1\right)}{2}\frac{\varepsilon_1'^2}{\bar{X}^2}\right\}.$$
۲. ۲۰

در ادامه عبارات ۲. ۱۸، ۲. ۱۹، ۲. ۲۰ و ۲. ۲۱ را به ترتیب به صورت زیر می توان نوشت:

$$\left(t_d - \bar{Y}\right) = \varepsilon_0^* + d_1\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_1^*\right) + d_2\left(\varepsilon_1' - \varepsilon_1\right) \tag{۲. ۲۲}$$

$$\left(t_d^{(r)} - \bar{Y}\right) = \bar{Y}\left(\frac{\varepsilon_0^*}{\bar{Y}} - \frac{\varepsilon_1^*}{\bar{X}} - \frac{\varepsilon_1^*\varepsilon_0^*}{\bar{X}\bar{Y}} + \frac{\varepsilon_1^{*2}}{\bar{X}^2} - \frac{\varepsilon_1}{\bar{X}} - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_0^*}{\bar{X}\bar{Y}} + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_1^*}{\bar{X}^2} + \frac{\varepsilon_1^2}{\bar{X}^2} + \frac{2\varepsilon_1'}{\bar{X}} + \frac{2\varepsilon_0^*\varepsilon_1'}{\bar{X}\bar{Y}} - \frac{2\varepsilon_1^*\varepsilon_1'}{\bar{X}^2} - \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_1'}{\bar{X}^2} + \frac{\varepsilon_1'^2}{\bar{X}^2}\right), \tag{۲. ۲۳}$$

$$\left(t_d^{(p)} - \bar{Y}\right) = \bar{Y}\left(\frac{\varepsilon_0^*}{\bar{Y}} + \frac{\varepsilon_1^*}{\bar{X}} + \frac{\varepsilon_1^*\varepsilon_0^*}{\bar{X}\bar{Y}} + \frac{\varepsilon_1}{\bar{X}} + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_0^*}{\bar{X}\bar{Y}} + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_1^*}{\bar{X}^2} - \frac{2\varepsilon_1'}{\bar{X}} - \frac{2\varepsilon_0^*\varepsilon_1'}{\bar{X}\bar{Y}} - \frac{2\varepsilon_1^*\varepsilon_1'}{\bar{X}^2} - \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_1'}{\bar{X}^2} + \frac{3\varepsilon_1'^2}{\bar{X}^2}\right), \tag{۲. ۲۴}$$

$$\begin{aligned}\left(t_{(\alpha_1)}^{(\alpha_2)} - \bar{Y}\right) = \bar{Y}\Bigg\{&\frac{\varepsilon_0^*}{\bar{Y}} - \frac{\alpha_1\varepsilon_1^*}{\bar{X}} - \frac{\alpha_1\varepsilon_1^*\varepsilon_0^*}{\bar{X}\bar{Y}} + \frac{\alpha_1(\alpha_1+1)}{2}\frac{\varepsilon_1^{*2}}{\bar{X}^2} + \frac{(\alpha_1-\alpha_2)\varepsilon_1}{\bar{X}} \\ &+ \frac{(\alpha_1-\alpha_2)\varepsilon_1\varepsilon_0^*}{\bar{X}\bar{Y}} - \frac{\alpha_1(\alpha_1-\alpha_2)\varepsilon_1\varepsilon_1^*}{\bar{X}^2} + \frac{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2-1)}{2}\frac{\varepsilon_1^2}{\bar{X}^2} \\ &+ \frac{\alpha_2\varepsilon_1'}{\bar{X}} + \frac{\alpha_2\varepsilon_0^*\varepsilon_1'}{\bar{X}\bar{Y}} - \frac{\alpha_1\alpha_2\varepsilon_1^*\varepsilon_1'}{\bar{X}^2} + \frac{\alpha_2(\alpha_1-\alpha_2)\varepsilon_1\varepsilon_1'}{\bar{X}^2} + \frac{\alpha_2(\alpha_2+1)}{2}\frac{\varepsilon'^2_1}{\bar{X}^2}\Bigg\}.\end{aligned} \tag{۲. ۲۵}$$

با در نظر گرفتن عبارات ۲. ۲۲، ۲. ۲۳، ۲. ۲۴ و ۲. ۲۵ دقیقاً به اریبی ویژه ای برای t_d خواهیم رسید:

$$B(t_d) = 0$$

و مقادیر اریبی برای $t_{\alpha_1}^{\alpha_2}$، t_d^r و t_d^p به صورت زیر به دست می آید:

$$B\left(t_d^{(r)}\right) = \frac{1}{\bar{X}}\left[\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right)S_x^2(3R - 2\beta) + \frac{W_2(k-1)}{n}S_{x_2}^2\left(R - \beta_{(2)}\right)\right] \tag{۲. ۲۶}$$

$$B\left(t_d^{(p)}\right) = \frac{1}{\bar{X}}\left[\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right)S_x^2(R + 2\beta) + \frac{W_2(k-1)}{n}S_{x_2}^2\beta_{(2)}\right] \tag{۲. ۲۷}$$

$$\begin{aligned}B\left(t_{(\alpha_1)}^{(\alpha_2)}\right) = \frac{1}{2}\Bigg[&\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right)S_x^2\alpha_2\left\{(\alpha_2+1)R - 2\beta\right\} \\ &+ \frac{W_2(k-1)}{n}S_{x_2}^2\alpha_1\left\{(\alpha_1+1)R - 2\beta_{(2)}\right\}\Bigg]\end{aligned} \tag{۲. ۲۸}$$

با توان دوم دو طرف عبارات ۲. ۲۲، ۲. ۲۳، ۲. ۲۴ و ۲. ۲۵ و حذف عبارات شامل $\varepsilon' s$ داریم:

$$\begin{aligned}(t_d-\bar{Y})^2 = \Big[&\varepsilon_0^* + d_1^2\left(\varepsilon_1^2-\varepsilon_1^{*^2}-2\varepsilon_1\varepsilon_1^*\right)+d_2\left(\varepsilon_1'^2-\varepsilon_1^2-2\varepsilon_1\varepsilon_1'\right)\\ &+2d_1\left(\varepsilon_0^*\varepsilon_1-\varepsilon_0^*\varepsilon_1^*\right)+2d_2\left(\varepsilon_0^*\varepsilon_1'-\varepsilon_0^*\varepsilon_1\right)\\ &+2d_1d_2\left(\varepsilon_1\varepsilon_1'-\varepsilon_1^2-\varepsilon_1^*\varepsilon_1'+\varepsilon_1\varepsilon_1^*\right)\Big],\end{aligned} \quad ۲. ۲۹$$

$$\begin{aligned}\left(t_d^{(r)}-\bar{Y}\right)^2 = \Big[&\varepsilon_0^{*^2}+R^2\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_1^{*^2}+2\varepsilon_1\varepsilon_1^*+4\varepsilon_1'^2-4\varepsilon_1^*\varepsilon_1'-4\varepsilon_1\varepsilon_1'\right)\\ &-2R\left(\varepsilon_0^*\varepsilon_1^*+\varepsilon_0^*\varepsilon_1-2\varepsilon_1'\varepsilon_0^*\right)\Big],\end{aligned} \quad ۲. ۳۰$$

$$\begin{aligned}\left(t_d^{(p)}-\bar{Y}\right)^2 = \Big[&\varepsilon_0^{*^2}+R^2\left(\varepsilon_1^{*^2}+\varepsilon_1^{*^2}+2\varepsilon_1\varepsilon_1^*+4\varepsilon_1'^2-4\varepsilon_1^*\varepsilon_1'-4\varepsilon_1\varepsilon_1'\right)\\ &+2R\left(\varepsilon_0^*\varepsilon_1^*+\varepsilon_0^*\varepsilon_1-2\varepsilon_1'\varepsilon_0^*\right)\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(t_{(\alpha_1)}^{(\alpha_2)}-\bar{Y}\right)^2 = \Big[&\varepsilon_0^{*^2}+R^2\Big\{\alpha_1^2\varepsilon_1^{*^2}+(\alpha_1-\alpha_2)^2\varepsilon_1^2-2\alpha_1(\alpha_1-\alpha_2)\varepsilon_1\varepsilon_1^*\\ &+\alpha_2^2\varepsilon_1'^2-2\alpha_1\alpha_2\varepsilon_1^*\varepsilon_1'-2\alpha_2(\alpha_1-\alpha_2)\varepsilon_1\varepsilon_1'\Big\}\\ &+2R\left(\alpha_1\varepsilon_0^*\varepsilon_1^*-(\alpha_1-\alpha_2)\varepsilon_0^*\varepsilon_1-\alpha_2\varepsilon_1'\varepsilon_0^*\right)\Big].\end{aligned} \quad ۲. ۳۱$$

با گرفتن امید ریاضی از دو طرف عبارات اخیر واریانس $t_{\alpha_1}^{\alpha_2}$، t_d^r، t_d^p و t_d به دست می آید. نتایج را می توان به صورت زیر خلاصه نمود:

$$\begin{aligned}Var(t_d) = \Big[&\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n'}\right)\left\{S_y^2+d_2S_x^2(d_2-2\beta)\right\}\\ &+\frac{W_2(k-1)}{n}\left\{S_{y_2}^2+d_1S_{x_2}^2(d_1-2\beta_{(2)})\right\}+\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{N}\right)S_y^2\Big]\end{aligned} \quad ۲. ۳۳$$

$$\begin{aligned}Var\left(t_d^{(r)}\right) = \Big[&\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n'}\right)\left\{S_y^2+4RS_x^2(R-\beta)\right\}\\ &+\frac{W_2(k-1)}{n}\left\{S_{y_2}^2+RS_{x_2}^2(R-2\beta_{(2)})\right\}+\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{N}\right)S_y^2\Big]\end{aligned} \quad ۲. ۳۴$$

$$\begin{aligned}Var\left(t_d^{(p)}\right) = \Big[&\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n'}\right)\left\{S_y^2+4RS_x^2(R+\beta)\right\}\\ &+\frac{W_2(k-1)}{n}\left\{S_{y_2}^2+RS_{x_2}^2(R+2\beta_{(2)})\right\}+\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{N}\right)S_y^2\Big]\end{aligned} \quad ۲. ۳۵$$

$$\begin{aligned}Var\left(t_{(\alpha_1)}^{(\alpha_2)}\right) = \Big[&\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n'}\right)\left\{S_y^2+R\alpha_2S_x^2(R\alpha_2-2\beta)\right\}\\ &+\frac{W_2(k-1)}{n}\left\{S_{y_2}^2+RS_{x_2}^2\alpha_1(R\alpha_1-2\beta_{(2)})\right\}+\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{N}\right)S_y^2\Big]\end{aligned}$$

با کمینه سازی عبارات۲. ۲۳ و ۲. ۳۶ و جایگذاری $(d_1، d_2)$ و $(\alpha_1، \alpha_2)$ با استفاده از روابط زیر

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= \beta_{(2)} = d_{10}(say) \\ d_2 &= \beta = d_{20}(say) \end{aligned}\right\} \qquad ۲. ۳۷$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_{(2)}/R = \alpha_{10}(say) \\ \alpha_2 &= \beta/R = \alpha_{20}(say) \end{aligned}\right\}$$

۲. ۳۸

و جایگزینی ۲. ۳۷ در ۲. ۴ و ۲. ۳۸ در ۲. ۳ به ترتیب برآوردگرهای اپتیمم $t_{\alpha_1}^{\alpha_2}$ و t_{d} بدست می آیند:

$$t_{(d_{10})}^{(d_{20})} = \bar{y}^* + \beta_{(2)}\left(\bar{x} - \bar{x}^*\right) + \beta\left(\bar{x}' - \bar{x}\right) \qquad ۲. ۳۹$$

$$t_{(\alpha_{10})}^{(\alpha_{20})} = \bar{y}^* \left(\frac{\bar{x}}{\bar{x}*}\right)^{\beta_{(2)}/R} \left(\frac{\bar{x}'}{\bar{x}}\right)^{\beta/R}$$

۲. ۴۰

به آسانی دیده می‌شود که برآوردگر اپتیمم $t_{d_{10}}^{d_{20}}$ ناریب و برآوردگر اپتیمم $t_{\alpha_{10}}^{\alpha_{20}}$ اریب است و مقدار دقیق واریانس برآوردگر اپتیمم $t_{d_{10}}^{d_{20}}$ بصورت زیر بدست می آید:

$$Var\left(t_{(d_{10})}^{(d_{20})}\right) = \left[\left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{N}\right) S_y^2 + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right) S_y^2 \left(1 - \rho^2\right) + \frac{W_2\,(k-1)}{n} S_{y_2}^2 \left(1 - \rho_2^2\right)\right] \qquad ۲. ۴۱$$

که کمترین مقدار واریانس $t_{d_1}^{d_2}$ با واریانس $t_{d_{10}}^{d_{20}}$ برابر است به عبارتی:

$$\min .Var\left(t_{(d_1)}^{(d_2)}\right) = Var\left(t_{(d_{10})}^{(d_{20})}\right)$$

در نظر بگیرید که $\left(S_{xy(2)}/S_{x_2}S_{y_2}\right) = \rho_2$ عبارت است از ضریب همبستگی بسنده بین x و y در گروه بی‌پاسخی جامعه است و $S_{xy(2)}$، S_{x_2} و S_{y_2} همان تعاریف سابق را دارند.

با جایگزینی ۲. ۳۸ در ۲. ۳۶ می توان به واریانس $t_{\alpha_{10}}^{\alpha_{20}}$ (و یا کمترین مقدار واریانس $t_{\alpha_1}^{\alpha_2}$) دست یافت که با اولین درجه تقریب خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} Var\left(t_{(\alpha_{10})}^{(\alpha_{20})}\right) &= \left[\left(\frac{1}{n'} - \frac{1}{N}\right) S_y^2 + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right) S_y^2 \left(1 - \rho^2\right) + \frac{W_2\,(k-1)}{n} S_{y_2}^2 \left(1 - \rho_2^2\right)\right] \\ &= \min .Var\left(t_{(\alpha_1)}^{(\alpha_2)}\right) \end{aligned} \qquad ۲. ۴۲$$

به روش مشابه واریانس برآوردگرهای مختلف $t_{d_{10}}^{d_{20}}$ را می توان بدست آورد. (۲. ۴۱)

مقادیر بهینهn، n' و k

تابع هزینه زیر را درنظر می گیریم:

$$C'' = c_1'n' + c_1 n + c_2 n_1 + c_3 \frac{n_2}{k} \qquad ۵. ۱$$

که در آن:

c_1' : هزینه واحد شراکت بوسیله نمونه مرحله اول به حجم n'

c_1 : هزینه تلاش اول بر اساسy بوسیله نمونه مرحله دوم

c_2 : هزینه واحد برای فرایند پاسخدهی داده ها بر اساسy بر حسب تلاش اول در n_1

c_3 : هزینه واحد شراکت از طریق عناصر زیرنمونه

برای عبارت اخیر امید ریاضی به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$C' = E(C'') = c_1'n' + n\left(c_1 + c_2 W_1 + c_3 \frac{W_2}{k}\right) \qquad ۵. ۲$$

فرض کنید واریانس برآوردگر t با حضور بی‌پاسخی با استفاده از طرح نمونه‌گیری دومرحله‌ای به صورت ذیل ارائه می گردد:

$$Var(t) = \frac{V_0}{n} + \frac{V_1}{n'} + \frac{k}{n}V_2 + \text{terms independent of } n,\ n' \text{and } k. \qquad ۵. ۳$$

V_0، V_1 و V_2 به ترتیب ضرایب $\frac{1}{n}$، $\frac{1}{n'}$و $\frac{k}{n}$ در بسط واریانس $t=\bar{y}^*$، $T_1, T_2, T_3 T_4 T_5, T_6$، $t_d^{(r)} t_d^{(p)}$ و t_e.

اکنون برای مینیمم کردن واریانس برای هزینه ثابت $C' \leq C''$ و بدست آوردن مقادیر بهینه از n، n' و k تابع زیر را تعریف می کنیم:

،

$$\phi = Var(t) + \lambda_i \left\{c_1'n' + n\left(c_1 + W_1 c_2 + \frac{W_2 c_3}{k}\right) - C''\right\} \qquad ۵. ۴$$

که در آن λ_i ضریب لاکرانژ است.

حال φ را با جایگزینی n، n' و k و برابر صفر قرار دادن عبارت به صورت زیر بیان می کنیم:

$$n' = \sqrt{\frac{V_1}{\lambda_i c_1'}} \qquad ۵. ۵$$

$$n = \sqrt{\frac{V_0 + kV_2}{\lambda_i \left\{c_1 + c_2 W_1 + \frac{c_3 W_2}{k}\right\}}} \qquad ۵. ۶$$

و

$$\frac{n}{k} = \sqrt{\frac{V_2}{\lambda_i c_3 W_2}}$$

با جایگزینی مقدار n از ۵. ۶ در ۵. ۷ خواهیم داشت:

$$k_{opt} = \sqrt{\frac{V_0 c_3 W_2}{(c_1 + c_2 W_1)\, V_2}} \qquad ۵. ۸$$

همچنین به ترتیب با جایگزینی مقادیر n و n' از ۵. ۵ و ۵. ۶ و با استفاده از ۵. ۸ در ۵. ۲ داریم:

$$\sqrt{\lambda_i} = \frac{1}{C''}\left[\sqrt{c_1' V_1} + \sqrt{\left(c_1 + c_2 W_1 + \frac{c_3 W_2}{k_{opt}}\right)(V_0 + k_{opt} V_2)}\right] \qquad ۵. ۹$$

بنابراین مینیمم مقدار $Var(t)$ به صورت زیر حاصل می گردد:

$$\min . Var(t) = \frac{1}{C''}\left[\sqrt{c_1' V_1} + \sqrt{\left(c_1 + c_2 W_1 + \frac{c_3 W_2}{k_{opt}}\right)(V_0 + k_{opt} V_2)}\right]^2 - \frac{S_y^2}{N}. \qquad ۵. ۱۰$$

برای واریانس ثابت $V = V'$ از ۵. ۸ قابل مشاهده خواهد بود که مقدار بهینه k از هزینه مستقل است.

فرض کنید V' واریانس مورد نظر است (در حالت پیشرفته ثابت فرض شود) بنابراین خواهیم داشت:

$$V' = \frac{V_0}{n} + \frac{V_1}{n'} + \frac{k}{n} V_2 - \frac{S_y^2}{N} \qquad ۵. ۱۱$$

در ادامه تابع φ' را برای بدست آوردن مقادیر بهینه n، n' و k تعریف می کنیم.

$$\phi' = \left\{c_1' n' + n\left(c_1 + c_2 W_1 + \frac{c_3 W_2}{k}\right)\right\} + \mu_i\left(Var(t) - V'\right) \qquad ۵. ۱۲$$

جدول ۲: مقادیر بهینه n، n' و k با هزینه مینیمم برای واریانس ثابت V' از برآورگرهای متفاوت

Estimator	Optim k			
T_4	$\left[\frac{B_0' c_3 W_2}{B_2'(c_1+c_2W_1)}\right]^{\frac{1}{2}}$ where $B_0' = S_y^2 - W_2 S_{y2}^2$, $B_2' = W_2 S_{y2}^2$	$\left(\frac{B_1'}{\lambda_i c_1'}\right)^{\frac{1}{2}}$ where $B_1' = S_y^2 - S_x^2$	$\left[\frac{(B_0'+k_{opt}B_2')}{\lambda_i\left(c_1+c_2W_1+\frac{c_3W_2}{k_{opt}}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{C''}\left[\sqrt{c_1'B_1'}+\sqrt{\left(c_1+c_2W_1+\frac{c_3W_2}{k_{opt}}\right)(B_0'+k_{opt}B_2')}\right]^2-\frac{S_y^2}{N}$
T_5	$\left[\frac{C_0' c_3 W_2}{C_2'(c_1+c_2W_1)}\right]^{\frac{1}{2}}$ where $C_0' = S_p^2 - W_2 S_{y2}^2$, $C_2' = W_2 S_{y2}^2$	$\left(\frac{C_1'}{\lambda_i c_1'}\right)^{\frac{1}{2}}$ where $C_1' = S_y^2 - S_p^2$	$\left[\frac{(C_0'+k_{opt}C_2')}{\lambda_i\left(c_1+c_2W_1+\frac{c_3W_2}{k_{opt}}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{C''}\left[\sqrt{c_1'C_1'}+\sqrt{\left(c_1+c_2W_1+\frac{c_3W_2}{k_{opt}}\right)(C_0'+k_{opt}C_2')}\right]^2-\frac{S_y^2}{N}$
T_6	$\left[\frac{F_0' c_3 W_2}{F_2'(c_1+c_2W_1)}\right]^{\frac{1}{2}}$ where $F_0' = S_y^2\left(1-\rho^2\right) - W_2 S_{y2}^2$, $F_2' = W_2 S_{y2}^2$	$\left(\frac{F_1'}{\lambda_i c_1'}\right)^{\frac{1}{2}}$ where $F_1' = \rho^2 S_y^2$	$\left[\frac{(F_0'+k_{opt}F_2')}{\lambda_i\left(c_1+c_2W_1+\frac{c_3W_2}{k_{opt}}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{C''}\left[\sqrt{c_1'F_1'}+\sqrt{\left(c_1+c_2W_1+\frac{c_3W_2}{k_{opt}}\right)(F_0'+k_{opt}F_2')}\right]^2-\frac{S_y^2}{N}$
$t_d^{(r)}$	$\left[\frac{D_0' c_3 W_2}{D_2'(c_1+c_2W_1)}\right]^{\frac{1}{2}}$ where $D_0' = S_R^2 - W_2 S_{y2}^2$, $D_2' = W_2 S_{y2}^2$, $S_R^2 = S_y^2 + 4RS_x^2(R-\beta)$	$\left(\frac{D_1'}{\lambda_i c_1'}\right)^{\frac{1}{2}}$ where $D_1' = 4RS_x^2(\beta - R)$	$\left[\frac{(D_0'+k_{opt}D_2')}{\lambda_i\left(c_1+c_2W_1+\frac{c_3W_2}{k_{opt}}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{C''}\left[\sqrt{c_1'D_1'}+\sqrt{\left(c_1+c_2W_1+\frac{c_3W_2}{k_{opt}}\right)(D_0'+k_{opt}D_2')}\right]^2-\frac{S_y^2}{N}$

که در آن μ_i ضریب لاکرانژ است. (جداول ۱ و ۲)

Estimator	Optimum values of k	n'	n	Minimum variance min. Var(t)
$\bar{y}$				
T				
T				
T				

Estimator	Optimum values of k	n'	n	Minimum cost min. C''
$\bar{y}^*$	$\left[\frac{V_0 c_3 W_2}{V_2(c_1+c_2W_1)}\right]^{\frac{1}{2}}$		$\left[\frac{\mu_i(V_0+k_{opt}V_2)}{\left(c_1+c_2W_1+\frac{c_3W_2}{k_{opt}}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{\left(c_1+c_2W_1+\frac{c_3W_2}{k_{opt}}\right)(V_0+k_{opt}V_2)}\right]^2$ where $\alpha = V' + \frac{S_y^2}{N}$
T_1	$\left[\frac{V_0' c_3 W_2}{V_2'(c_1+c_2W_1)}\right]^{\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{\mu_i V_1'}{c_1'}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left[\frac{\mu_i(V_0'+k_{opt}V_2')}{\left(c_1+c_2W_1+\frac{c_3W_2}{k_{opt}}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{c_1'V_1'}+\sqrt{\left(c_1+c_2W_1+\frac{c_3W_2}{k_{opt}}\right)(V_0'+k_{opt}V_2')}\right]^2$
T_2	$\left[\frac{A_0' c_3 W_2}{A_2'(c_1+c_2W_1)}\right]^{\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{\mu_i A_1'}{c_1'}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left[\frac{\mu_i(A_0'+k_{opt}A_2')}{\left(c_1+c_2W_1+\frac{c_3W_2}{k_{opt}}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{c_1'A_1'}+\sqrt{\left(c_1+c_2W_1+\frac{c_3W_2}{k_{opt}}\right)(A_0'+k_{opt}A_2')}\right]^2$
T_3	$\left[\frac{F_0 c_3 W_2}{F_2(c_1+c_2W_1)}\right]^{\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{\mu_i F_1}{c_1'}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left[\frac{\mu_i(F_0+k_{opt}F_2)}{\left(c_1+c_2W_1+\frac{c_3W_2}{k_{opt}}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{c_1'F_1}+\sqrt{\left(c_1+c_2W_1+\frac{c_3W_2}{k_{opt}}\right)(F_0+k_{opt}F_2)}\right]^2$
T_4	$\left[\frac{B_0' c_3 W_2}{B_2'(c_1+c_2W_1)}\right]^{\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{\mu_i B_1'}{c_1'}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left[\frac{\mu_i(B_0'+k_{opt}B_2')}{\left(c_1+c_2W_1+\frac{c_3W_2}{k_{opt}}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{c_1'B_1'}+\sqrt{\left(c_1+c_2W_1+\frac{c_3W_2}{k_{opt}}\right)(B_0'+k_{opt}B_2')}\right]^2$
T_5	$\left[\frac{C_0' c_3 W_2}{C_2'(c_1+c_2W_1)}\right]^{\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{\mu_i C_1'}{c_1'}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left[\frac{\mu_i(C_0'+k_{opt}C_2')}{\left(c_1+c_2W_1+\frac{c_3W_2}{k_{opt}}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{c_1'C_1'}+\sqrt{\left(c_1+c_2W_1+\frac{c_3W_2}{k_{opt}}\right)(C_0'+k_{opt}C_2')}\right]^2$
T_6	$\left[\frac{F_0' c_3 W_2}{F_2'(c_1+c_2W_1)}\right]^{\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{\mu_i F_1'}{c_1'}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left[\frac{\mu_i(F_0'+k_{opt}F_2')}{\left(c_1+c_2W_1+\frac{c_3W_2}{k_{opt}}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{c_1'F_1'}+\sqrt{\left(c_1+c_2W_1+\frac{c_3W_2}{k_{opt}}\right)(F_0'+k_{opt}F_2')}\right]^2$

دوره ۸، شماره ۱، بهار ۱۴۰۱، صفحات ۳۶۸-۳۵۵

Estimator	Optimum values of			Minimum cost
	k	n'	n	min. C''
$t_d^{(r)}$	$\left[\frac{D_0' c_3 W_2}{D_2'(c_1+c_2W_1)}\right]^{\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{\mu_i D_1'}{c_1'}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left\{\frac{\mu_i(D_0'+k_{opt}D_2')}{\left(c_1+c_2W_1+\frac{c_3W_2}{k_{opt}}\right)}\right\}^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{c_1' D_1'}+\sqrt{\left(c_1+c_2W_1+\frac{c_3W_2}{k_{opt}}\right)(D_0'+k_{opt}D_2')}\right]^2$
$t_d^{(p)}$	$\left[\frac{E_0' c_3 W_2}{E_2'(c_1+c_2W_1)}\right]^{\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{\mu_i E_1'}{c_1'}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left\{\frac{\mu_i(E_0'+k_{opt}E_2')}{\left(c_1+c_2W_1+\frac{c_3W_2}{k_{opt}}\right)}\right\}^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{c_1' E_1'}+\sqrt{\left(c_1+c_2W_1+\frac{c_3W_2}{k_{opt}}\right)(E_0'+k_{opt}E_2')}\right]^2$
$t_{rd}=t_e$	$\left[\frac{H_0' c_3 W_2}{H_2'(c_1+c_2W_1)}\right]^{\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{\mu_i H_1'}{c_1'}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left\{\frac{\mu_i(H_0'+k_{opt}H_2')}{\left(c_1+c_2W_1+\frac{c_3W_2}{k_{opt}}\right)}\right\}^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{c_1' H_1'}+\sqrt{\left(c_1+c_2W_1+\frac{c_3W_2}{k_{opt}}\right)(H_0'+k_{opt}H_2')}\right]^2$

اکنون در عبارت ۵. ۱۲ با جایگزینی n، n' و k و برابر صفر قرار دادن عبارت داریم:

۵. ۱۳

$$n' = \sqrt{\frac{\mu_i V_1}{c_1'}}$$

$$n = \sqrt{\frac{\mu_i\,(V_0 + k V_2)}{\left\{c_1 + c_2 W_1 + \frac{c_3 W_2}{k}\right\}}}$$

۵. ۱۴

پس از این مرحله مقادیر n را در ۵. ۱۵ جایگذاری

$$\frac{n}{k} = \sqrt{\frac{\mu_i V_2}{c_3 W_2}}.$$

کرده و خواهیم داشت:

$$k_{opt} = \sqrt{\frac{V_0 c_3 W_2}{(c_1 + c_2 W_1)\, V_2}}.$$

۵. ۱۶

مانند آنچه در قسمت های قبلی دیدیم با جایگزینی n، n' و k در ۵. ۱۲ مقدار زیر به دست می آید:

$$\sqrt{\mu_i} = \frac{\left[\sqrt{c_1' V_1} + \sqrt{\left(c_1 + c_2 W_1 + \frac{c_3 W_2}{k_{opt}}\right)(V_0 + k_{opt}}\right]}{\left(V' + \frac{S_y^2}{N}\right)}.$$

۵. ۱۷

بنابراین مینیمم مجموع هزینه مورد انتظار به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$\min.C'' = \frac{\left[\sqrt{c_1' V_1} + \sqrt{\left(c_1 + c_2 W_1 + \frac{c_3 W_2}{k_{opt}}\right)(V_0 + k_{opt} V_2)}\right]^2}{\left(V' + \frac{S_y^2}{N}\right)}.$$

۵. ۱۸

دوره ۸، شماره ۱، بهار ۱۴۰۱، صفحات ۳۶۸-۳۵۵

مقادیر بهینه n، n' و k به همراه:

- واریانس مینیمم برای هزینه ثابت C''
- هزینه مینیمم برای واریانس ثابت V'

Estimator	Optimum values of			Minimum Variance
	k	n'	n	min. Var (t)
$t_d^{(P)}$	$\left[\frac{E'_0 c_3 W_2}{E'_2(c_1+c_2W_1)}\right]^{\frac{1}{2}}$ *where* $E'_0 = S_p^2 - W_2 S_{p_2}^2$ $E'_2 = W_2 S_{p_2}^2$ $S_p^2 = S_y^2 + 4RS_x^2(R+\beta)$	$\left(\frac{E'_1}{\lambda_1 c'_1}\right)^{\frac{1}{2}}$ *where* $E'_1 = -4RS_x^2(\beta+R)$	$\left\{\frac{(E'_0+k_{opt}E'_2)}{\lambda_1\left(c_1+c_2W_1+\frac{c_3W_2}{k_{opt}}\right)}\right\}^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{C''}\left[\sqrt{c'_1E'_1}+\sqrt{\left(c_1+c_2W_1+\frac{c_3W_2}{k_{opt}}\right)(E'_0+k_{opt}E'_2)}\right]^2-\frac{S_y^2}{N}$
$t_{rd} = \hat{t}_r$	$\left[\frac{H'_0 c_3 W_2}{H'_2(c_1+c_2W_1)}\right]^{\frac{1}{2}}$ *where* $H'_0 = G_1 - W_2G_2$ $H'_2 = W_2G_2$ $G_1 = S_y^2\left(1-\rho^2\right)$ $G_2 = S_{y_2}^2\left(1-\rho_2^2\right)$	$\left(\frac{H'_1}{\lambda_1 c'_1}\right)^{\frac{1}{2}}$ *where* $H'_1 = S_y^2 - G_1$	$\left\{\frac{(H'_0+k_{opt}H'_2)}{\lambda_1\left(c_1+c_2W_1+\frac{c_3W_2}{k_{opt}}\right)}\right\}^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{C''}\left[\sqrt{c'_1H'_1}+\sqrt{\left(c_1+c_2W_1+\frac{c_3W_2}{k_{opt}}\right)(H'_0+k_{opt}H'_2)}\right]^2-\frac{S_y^2}{N}$

بحث و نتیجه گیری

در این مقاله به اثر و خطای بی‌پاسخی در طرح‌های پژوهشی و به‌ویژه نمونه‌گیری پرداخته شد. روش‌های مختلف برخورد با این موضوع را برشمردیم و با استفاده از روش‌های پیشرفته استنباط آماری و بهره‌مندی از روش‌های برآوردیابی، مفاهیم بهینه‌سازی برآورگردها و انتخاب مناسب‌ترین و به عبارتی بهترین برآوردگر با حضور بی‌پاسخی برای تعدیل اثر بی‌پاسخی و تحلیل میزان کارایی آن‌ها ارائه گردید. آنچه مسلم است انتخاب روش علمی برخورد با مقوله بی‌پاسخی در طرح‌های تحقیقاتی و عملیاتی است چراکه این موضوع در اکثریت مطالعات میدانی اجتناب‌ناپذیر بوده و محقق می‌بایست با استفاده از تکنیک‌های پیشرفته آماری نسبت به بهترین استراتژی در جهت کاهش اثر بی‌پاسخی اقدام نماید.

منابع

۱. شلدون، راس، پارسیان، ا، زینل همدانی، ع، ۱۳۸۱، مبانی احتمال.

۲. پارسیان، ا، انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان، مبانی آمار ریاضی

3. Cochran WG (1977) Sampling tehniques، 3rd edn. Wiley، New York
4. Das AK، Tripathi TP (1978) Use of auxiliary information in estimating the finite population variance. Sankhya C 40:139–148
5. Hansen MH، HurwitzWN (1946) The problem of non-response in sample surveys. JAmStat Assoc 41:517–529

6. Housila P. Singh ·Sunil Kumar (2007)-Estimation of mean in presence of non-response using two phase sampling scheme
7. Khare BB، Srivastava S (1997) Transformed ratio type estimators for the population mean in the presence of non-response. Commun Stat Theory Methods 26(7):1779–1791
8. MurthyMN(1967) Sampling theory and methods، 1st edn. Calcutta Statistical society، Kolkatta، pp 127–130
9. Okafor FC (2001) Treatment of non-response in successive sampling. Stat LXI 2:195–204
10. Okafor FC (2005) Sub-sampling the non-respondents in two-stage sampling over two successive occasions. J Ind Stat Assoc 43(1):33–49
11. Okafor FC، Lee H (2000) Double sampling for ratio and regression estimation with sub-sampling the nonrespondents. Surv Methodol 26(2):183–188
12. Pontryagin. L. S، 1962. The Mathematical Theory of Optimal Processes.
13. Rao PSRS (1986) Ratio estimation with sub-sampling the non-respondents. Surv Methodol 12(2):217–230
14. Reddy VN (1973) On ratio and product method of estimation. Sankhya (B) 35:307–316
15. Srivastava S (1993) Some problems on the estimation of population mean using auxiliary character in presence of non-response in sample surveys. Thesis Banaras Hindu University، Varanasi، India (submitted) Springer، New York.
16. Srivastava SK (1967) An estimator using auxiliary information in sample surveys. Calcutta Stat Assoc Bull, 16:121–132