

روش‌های نردسیک با نقطه غیرگامی

شب‌نم تاج بخش شیشوان

کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشگاه تبریز

چکیده

پایه‌سازی روش‌های هیبریدی که در آن‌ها یک یا چند نقطه غیرگامی حضور دارند، با استفاده از نمایش استاندارد داده‌های ورودی و خروجی در یک محیط طول گام متغیر مشکل است. با وجود این، به جای نمایش این داده‌ها بر حسب مقادیر جواب و مقادیر مشتقات در هر گام، می‌توان روش را به نحوی جدید فرمول‌بندی کرد که این داده‌ها تقریبی برای بردار نردسیک را ارائه دهند. چنین وضعیتی این امکان را فراهم می‌کند که تغییر طول گام به سهولت انجام گیرد. این پژوهش، نحوه به‌دست آوردن روش‌ها در هر دو نمایش را بررسی کرده و برخی جزئیات پایه‌سازی را مورد بحث قرار می‌دهد. همچنین یک روش هیبریدی جدید با استفاده از نمایش نردسیک ساخته شده و نتایج عددی آن در مقایسه با نتایج عددی روش‌های استاندارد دیگر برای نشان دادن کارایی روش جدید ارائه می‌شود.

کلیدواژه‌ها: روش‌های هیبریدی، نقاط غیر گامی بردارهای نردسیک، طول گام متغیر.

مقدمه

معادلات دیفرانسیل، اغلب از مدل کردن پدیده‌های فیزیکی حاصل می‌شوند یک معادله دیفرانسیل عبارت است از رابطه‌ای بین یک تابع مجهول، متغیر(های) تابع مجهول و مشتقات تابع مجهول می‌باشد. بنابراین آن چیزی که یک معادله دیفرانسیل را از یک معادله جبری متمایز می‌کند، وجود مشتق تابع مجهول در معادله می‌باشد. معادلات دیفرانسیل را از دیدگاه‌های متفاوتی می‌توان دسته‌بندی نمود:

اگر در معادله دیفرانسیل تابع مجهول بر حسب یک متغیر باشد، آنگاه معادله دیفرانسیل را یک معادله دیفرانسیل معمولی^۱ یا به اختصار ODE می‌نامیم.

معادلات دیفرانسیل معمولی

یک معادله دیفرانسیل معمولی رابطه‌ای بین یک متغیر مستقل، یک متغیر وابسته و مشتقاتش نسبت به متغیر مستقل است.

بنابراین شکل یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه n ام در حالت کلی به صورت

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

و در حالت استاندارد به صورت

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}),$$

بیان می‌شود.

این معادله جوابی به شکل $y = \phi(x)$ دارد، اگر تابع ϕ تا مرتبه n ام مشتق پذیر بوده و خود تابع و مشتقات آن در رابطه فوق صدق کنند. معادله دیفرانسیل همراه با شرایط اولیه را مسأله مقدار اولیه می‌نامند، بنابراین معادله بالا را همراه با مقادیر معلوم $y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)$ در نقطه $x = x_0$ مسأله مقدار اولیه مرتبه n ام می‌نامند. هرگاه n شرط مسأله، برای تعیین مقادیر ثابت در بیش از یک نقطه داده شود، آنگاه این n شرط، شرایط مرزی نامیده می‌شود. هر مسأله مقدار اولیه از معادله دیفرانسیل مرتبه n را می‌توان با دستگاه n معادله مرتبه اول هم ارز نمود. از این رو حل مسأله مقدار اولیه از دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول حائز اهمیت است.

روش چندگامی خطی

ساختار کلی یک روش چندگامی به صورت

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j} \quad (15.1)$$

است که در آن، α_j و β_j ، $j = 0, 1, \dots, k$ اعداد حقیقی ثابت هستند و $f_{n+j} = f(x_{n+j}, y_{n+j})$ همچنین برای منحصر

به فردی ضرایب فرض می‌شود $\alpha_k = 1$ ، اگر $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ باشد آنگاه $k - 1$

گام خواهیم داشت. بنابراین باید $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$ به طور کلی، اگر $\beta_k = 0$ ، روش صریح است و اگر $\beta_k \neq 0$ در این

صورت روش چندگامی خطی، یک روش ضمنی روش‌های چندگامی خطی با ویژگی $\alpha_{k-1} = 1$ و $\alpha_j = 0$ برای j

$0, 1, \dots, k - 2$ ، اگر صریح باشند به روش‌های آدامز-بشفورث^۲

و در صورت ضمنی بودن به روش‌های آدامز-مولتون^۳ معروف هستند. همچنین روش‌هایی با ویژگی $\beta_k \neq 0$

^۱ Ordinary Differential Equation

^۲ Adams-Bashforth

^۳ Adams-Moulton

و $\beta_j = 0$ برای $j = 0, 1, \dots, k-1$ به روش‌های تفاضلی پسرو یا روش‌های مشتق‌گیری پسرو یا به روش‌های^۴ معروف هستند که اولین بار توسط کورتیس^۵ و هیرچسفلدر^۶ معرفی شدند.

روش‌های خطی عمومی

محاسبه یک تقریب مناسب برای جواب مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی (۱،۱) به طور معمول شامل دو عملیات است: اولی محاسبه‌ی تابع f تعریف شده در معادله‌ی دیفرانسیل در نقاطی خاص و دومی محاسبه‌ی یک ترکیب خطی ویژه از بردارهای به دست آمده‌ی قبلی که هر دو مورد در فرم کلی روش‌های خطی عمومی لحاظ می‌شوند. روش‌های خطی عمومی یا به اختصار GLMS در سال ۱۹۶۶ توسط بوچر معرفی شدند. این روش‌ها، روش‌هایی چندمقداری و چند مرحله‌ای هستند که دو دسته‌ی مهم از روش‌های عددی یعنی روش‌های چندگامی خطی و روش‌های رانگ-کوتا را می‌توان در قالب آن‌ها بیان کرد. یک GLM از تعداد r مقدار ورودی از مقادیر تقریبی جواب و از تعداد s مقدار مرحله‌ای از مقادیر تقریبی مشتق جواب استفاده کرده و r مقدار خروجی را محاسبه می‌کند که در فرم نردسیک این بردارهای ورودی و خروجی به شکل خاصی در نظر گرفته می‌شوند.

شکل کلی روش‌های خطی عمومی

یک روش خطی عمومی برای حل مسأله‌ی مقدار اولیه (۲،۱) به وسیله‌ی چهار ماتریس به صورت $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{s \times s}$ ، $U = (u_{ij}) \in \mathbb{R}^{s \times r}$ ، $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{r \times s}$ و $V = (v_{ij}) \in \mathbb{R}^{r \times r}$ مشخص شده و در قالب یک ماتریس بلوکی به شکل

$$\begin{bmatrix} A & U \\ B & V \end{bmatrix}$$

نمایش داده شده و به صورت

$$Y_i^{[n]} = h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(Y_j^{[n]}) + \sum_{j=1}^r u_{ij} y_j^{[n-1]}, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

$$y_i^{[n]} = h \sum_{j=1}^s b_{ij} f(Y_j^{[n]}) + \sum_{j=1}^r v_{ij} y_j^{[n-1]}, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

تعریف می‌شود که در آن $Nh = \bar{x} - x_0$ ، $n = 1, 2, \dots, N$ و مفهوم نمادهایی به کار رفته به صورت زیر است

- مقادیر $Y_i^{[n]}$ ، $i = 1, 2, \dots, s$ تقریبی از مقادیر مرحله‌ای $y(x_{n-1} + c_i h)$ هستند.
 - مقادیر $f(Y_i^{[n]})$ ، $i = 1, 2, \dots, s$ تقریبی از مقادیر مشتق مرحله‌ای $y'(x_{n-1} + c_i h)$ هستند.
 - مقادیر $y_i^{[n-1]}$ ، $i = 1, 2, \dots, r$ تقریبی از مقادیر ورودی در گام $(n-1)$ ام هستند.
 - مقادیر $y_i^{[n-1]}$ ، $i = 1, 2, \dots, r$ تقریبی از مقادیر خروجی در گام n ام هستند.
- ضرایب c_i ، $i = 1, 2, \dots, s$ را با بردار $c = [c_1, c_2, \dots, c_s]^T$ نشان داده و آن را بردار طولی می‌نامیم. حال با قرار دادن $i = 1, 2, \dots, s$ و معرفی بردارهای

^۴ Backward differentiation formula

^۵ Gurtiss

^۶ Hirschfelder

$$Y^{[n]} = \begin{bmatrix} Y_1^{[1]} \\ Y_2^{[n]} \\ \vdots \\ Y_s^{[n]} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_s \end{bmatrix}, \quad Y^{[n-1]} = \begin{bmatrix} y_1^{[n-1]} \\ y_2^{[n-1]} \\ \vdots \\ y_s^{[n-1]} \end{bmatrix}, \quad y^{[n]} = \begin{bmatrix} y_1^{[n]} \\ y_2^{[n]} \\ \vdots \\ y_s^{[n]} \end{bmatrix}$$

نمایش ماتریسی یک روش خطی عمومی به صورت

$$\begin{aligned} Y^{[n]} &= h(A \otimes I_m)F + (U \otimes I_m)(y^{[n-1]}), \\ y^{[n]} &= h(B \otimes I_m)F + (V \otimes I_m)(y^{[n-1]}), \end{aligned} \quad (1.2)$$

یا به شکل

$$\begin{bmatrix} Y^{[n]} \\ y^{[n]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \otimes I_m & U \otimes I_m \\ B \otimes I_m & V \otimes I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} hF \\ y^{[n-1]} \end{bmatrix},$$

نوشته می شود که در آن I_m ماتریس همانی عدد m و نماد $\otimes$ ضرب کرونکر^۷ می باشد. که برای دو ماتریس دلخواه $\Delta = (\delta_{ij}) \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$ و $\Gamma \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$ به صورت

$$\Delta \otimes \Gamma = \begin{bmatrix} \delta_{11}\Gamma & \delta_{12}\Gamma & \dots & \delta_{1n_1}\Gamma \\ \delta_{21}\Gamma & \delta_{22}\Gamma & \dots & \delta_{2n_1}\Gamma \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{m_1 1}\Gamma & \delta_{m_1 2}\Gamma & \dots & \delta_{m_1 n_1}\Gamma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m_1 m_2 \times n_1 n_2}$$

تعریف می شود.

روش پیشگو-اصلاحگر چندگامی با یک نقطه غیرگامی

در این پژوهش ما به دنبال روش هایی هستیم که اصلاحگر

$$\begin{aligned} y_n &= \alpha_1 y_{n-1} + \alpha_2 y_{n-2} + \dots + \alpha_k y_{n-k} \\ &\quad + h(\beta f_{n-\theta} + \beta_0 f_n + \beta_1 f_{n-1} + \dots + \beta_k f_{n-k}), \end{aligned} \quad (1.3)$$

را با اولین پیشگو برای تقریب غیرگامی در $x_0 - \theta h$ به فرم

$$y_{n-\theta} = A_1 y_{n-1} + A_2 y_{n-2} + \dots + A_k y_{n-k} + h(B_1 f_{n-1} + \dots + B_k f_{n-k}), \quad (2.3)$$

و پیشگو دوم برای تقریب اولیه در انتهای مرحله به فرم

$$\begin{aligned} y_n &= a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \dots + a_k y_{n-k} \\ &\quad + h(b f_{n-\theta} + b_1 f_{n-1} + \dots + b_k f_{n-k}), \end{aligned} \quad (3.3)$$

را با هم ادغام می دهند. بدین صورت که دو رابطه (۱,۳) و (۲,۳) در رابطه (۲,۳) مورد استفاده قرار می گیرند تا تقریبی برای مقدار

جواب y در نقطه گامی x_0 به دست آید. اگر قرارداد کنیم که مقادیر پیشگو در نقطه گامی x_n و نقطه غیرگامی $x_{n-\theta}$ به

ترتیب، $\hat{y}_n$ و $\hat{y}_{n-\theta}$ و مقادیر مشتق مربوط با $\hat{f}_n$ و $\hat{f}_{n-\theta}$ نشان داده شوند، مراحل مربوط به یک مرحله را می توان به صورت زیر داشت:

$$\hat{y}_{n-\theta} = A_1 y_{n-1} + A_2 y_{n-2} + \dots + A_k y_{n-k} + h(B_1 f_{n-1} + \dots + B_k f_{n-k}), \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_n &= a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \dots + a_k y_{n-k} \\ &\quad + h(b \hat{f}_{n-\theta} + b_1 f_{n-1} + \dots + b_k f_{n-k}), \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} y_n &= \alpha_1 y_{n-1} + \alpha_2 y_{n-2} + \dots + \alpha_k y_{n-k} \\ &\quad + h(\beta \hat{f}_{n-\theta} + \beta_0 \hat{f}_n + \beta_1 \hat{f}_{n-1} + \dots + \beta_k \hat{f}_{n-k}), \end{aligned} \quad (6.3)$$

^۷Kronecker

در روش (۵،۳) ضرایب A_i و B_i ، $i = 1, 2, \dots, k$ ، طوری به دست می آیند که روش از ماکزیمم مرتبه ممکن یعنی $2k - 1$ باشد. همچنین در روش (۶،۳) ضرایب a_i و b_i ، $i = 1, 2, \dots, k$ ، برای حصول مرتبه $2k - 1$ به دست آمده و ضرایب b به عنوان پارامتر آزاد در نظر گرفته می شود. در ادامه در روش (۷،۳) ضرایب α_i و β_i ، $i = 1, 2, \dots, k$ ، و β و $i = 0, 1, \dots, k$ طوری به دست می آیند که روش از مرتبه $2k + 1$ باشد اما چون در روش (۷،۳) از تقریبات $h\beta_0\hat{f}_n$ و $h\beta\hat{f}_{n-\theta}$ که تقریباتی از مرتبه $2k$ هستند (چون تقریبات $\hat{y}_n$ و $\hat{y}_{n-\theta}$ به دست آمده از به ترتیب (۵،۳) و (۶،۳) تقریباتی از مرتبه $2k - 1$ هستند و در نتیجه $h\hat{f}_n$ و $h\hat{f}_{n-\theta}$ تقریباتی از مرتبه $2k$ خواهند بود)، استفاده شده است، عملاروش در کل از مرتبه $2k$ خواهد بود. برای اینکه روش از مرتبه $2k + 1$ باقی بماند، کافی است ثابت خطای از مرتبه $2k$ ایجاد شده در (۷،۳) که برابر $\beta_1\varepsilon_1 + \beta_0\varepsilon_2$ است، صفر شود که در اینجا ε_1 و ε_2 به ترتیب ثابت خطای روش های هستند. چون ε_2 وابسته به پارامتر آزاد b است، بنابراین با حل معادله $\beta\varepsilon_1 + \beta_0\varepsilon_2 = 0$ نسبت به پارامتر b ، روش در کل از مرتبه $2k + 1$ خواهد بود. مثال هایی از روش تولید شده با این رویکرد و $k = 2$ برای θ های متفاوت به صورت زیر است:

$$\theta = \frac{7}{15} \quad (۱)$$

$$\begin{aligned} y_{n-\frac{7}{15}} &= \frac{529}{3375}y_{n-1} + \frac{3904}{3375}y_{n-2} + h\left(\frac{4232}{3375}f_{n-1} + \frac{1472}{3375}f_{n-1}\right), \\ y_n &= \frac{152}{25}y_{n-1} + \frac{127}{125}y_{n-2} + h\left(\frac{189}{92}f_{n-\frac{7}{15}} - \frac{419}{100}f_{n-1} - \frac{1118}{575}f_{n-2}\right), \\ y_n &= y_{n-1} + h\left(\frac{3375}{5152}\hat{f}_{n-\frac{7}{15}} + \frac{25}{168}\hat{f}_n + \frac{19}{96}f_{n-1} - \frac{1}{552}f_{n-2}\right), \end{aligned}$$

$$\theta = \frac{3}{4} \quad (۲)$$

$$\begin{aligned} y_{n-\frac{3}{4}} &= \frac{25}{32}y_{n-1} + \frac{7}{32}y_{n-2} + h\left(\frac{25}{64}f_{n-1} + \frac{5}{64}f_{n-1}\right), \\ y_n &= \frac{164}{31}y_{n-1} - \frac{133}{21}y_{n-2} + \frac{768}{155}h\hat{f}_{n-\frac{3}{4}} - \frac{212}{31}hf_{n-1} - \frac{218}{155}hf_{n-2} \\ y_n &= \frac{64}{31}y_{n-1} - \frac{17}{47}y_{n-2} + \frac{768}{155}h\hat{f}_{n-\frac{3}{4}} + \frac{1024}{155}hf_{n-\frac{3}{4}} + \frac{31}{141}hf_n - \frac{44}{47}hf_{n-1} \\ &\quad - \frac{23}{235}hf_{n-2} \end{aligned}$$

$$\theta = \frac{5}{16} \quad (۳)$$

$$\begin{aligned} y_{n-\frac{5}{16}} &= -\frac{2187}{2048}y_{n-1} + \frac{4235}{2048}y_{n-2} + \frac{8019}{4096}hf_{n-1} + \frac{3267}{4096}f_{n-2}, \\ y_n &= \frac{1588}{83}y_{n-1} - \frac{1505}{83}y_{n-2} + \frac{81920}{24651}h\hat{f}_{n-\frac{5}{16}} - \frac{12028}{913}hf_{n-1} - \frac{16318}{2241}hf_{n-2} \\ y_n &= \frac{256}{293}y_{n-1} + \frac{37}{293}y_{n-2} + \frac{262143}{435105}h\hat{f}_{n-\frac{5}{16}} + \frac{83}{1465}hf_{n-1}h\hat{f}_n + \frac{1396}{3223}hf_{n-1} \\ &\quad + \frac{269}{7911}hf_{n-2} \end{aligned}$$

شکل GLM روش ها

در این بخش، روش (۵،۳) تا (۷،۳) که روشی سه مرحله ای و چند مقداری است، د قالب GLMS نوشته می شود. برای معرفی شکل GLM این روش ها، ابتدا بردارهای ورودی، خروجی، مقادیر مرحله ای را به صورت

$$\tilde{y}^{[n-1]} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1^{[n-1]} \\ \tilde{y}_2^{[n-1]} \\ \vdots \\ \tilde{y}_{2k+2}^{[n-1]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{n-1} \\ y_{n-2} \\ \vdots \\ y_{n-k-1} \\ hf_{n-1} \\ hf_{n-2} \\ \vdots \\ hf_{n-k-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{y}^{[n]} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1^{[n]} \\ \tilde{y}_2^{[n]} \\ \vdots \\ \tilde{y}_{2k+2}^{[n]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_n \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_{n-k} \\ hf_n \\ hf_{n-1} \\ \vdots \\ hf_{n-k} \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} \tilde{y}_{n-\theta} \\ \tilde{y}_n \\ y_n \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \hat{f}_{n-\theta} \\ \hat{f}_n \\ f_n \end{bmatrix},$$

تعریف می‌کنیم در این صورت روش (۴,۳) تا (۶,۳) در شکل GLM به صورت

$$\begin{bmatrix} Y \\ y^{[n]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \tilde{U} \\ \tilde{B} & \tilde{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} hF \\ \tilde{y}^{[n-1]} \end{bmatrix}. \quad (7.3)$$

است که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ \beta & \beta_0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_k & 0 & B_1 & B_2 & \dots & B_k & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k & 0 & b_1 & b_2 & \dots & b_k & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \dots & b_k & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \beta & \beta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_k & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال‌هایی از روش (۴,۳) تا (۶,۳) در قالب GLM به صورت زیر ارائه می‌شوند.

$$\theta = \frac{7}{15} \text{ و } k = 2 \quad (۱)$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} A \\ \tilde{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{V} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{529}{3375} & \frac{3904}{3375} & 0 & \frac{4232}{3375} & \frac{1472}{3375} & 0 \\ \frac{189}{92} & 0 & 0 & \frac{152}{25} & -\frac{127}{25} & 0 & -\frac{419}{100} & \frac{1118}{575} & 0 \\ \frac{3375}{5152} & \frac{25}{168} & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{19}{96} & -\frac{1}{552} & 0 \\ \frac{3375}{5152} & \frac{25}{168} & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{19}{96} & -\frac{1}{552} & 0 \\ \frac{3375}{5152} & \frac{25}{168} & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{19}{96} & -\frac{1}{552} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \\
\theta &= \frac{5}{16}, k=2 \quad (۲) \\
\begin{bmatrix} A \\ \tilde{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{V} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{21}{2048} & \frac{4235}{2048} & 0 & \frac{8019}{4096} & \frac{3267}{4096} & 0 \\ \frac{81920}{24651} & 0 & 0 & \frac{1588}{83} & -\frac{1505}{83} & 0 & -\frac{12028}{913} & \frac{16318}{2241} & 0 \\ \frac{262144}{435105} & \frac{83}{1465} & 0 & \frac{256}{293} & \frac{37}{293} & 0 & \frac{1396}{3223} & \frac{269}{7911} & 0 \\ \frac{435105}{262144} & \frac{83}{1465} & 0 & \frac{256}{293} & \frac{37}{293} & 0 & \frac{1396}{3223} & \frac{269}{7911} & 0 \\ \frac{435105}{262144} & \frac{83}{1465} & 0 & \frac{256}{293} & \frac{37}{293} & 0 & \frac{1396}{3223} & \frac{269}{7911} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \\
\theta &= \frac{3}{4}, k=2 \quad (۳) \\
\begin{bmatrix} A \\ \tilde{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{V} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{35}{32} & \frac{7}{35} & 0 & \frac{25}{64} & \frac{5}{64} & 0 \\ \frac{768}{155} & 0 & 0 & \frac{164}{31} & -\frac{133}{31} & 0 & -\frac{212}{31} & -\frac{218}{575} & 0 \\ \frac{1024}{705} & \frac{31}{141} & 0 & \frac{64}{47} & -\frac{17}{47} & 0 & -\frac{44}{47} & -\frac{23}{235} & 0 \\ \frac{1024}{705} & \frac{31}{141} & 0 & \frac{64}{47} & -\frac{17}{47} & 0 & -\frac{44}{47} & -\frac{23}{235} & 0 \\ \frac{1024}{705} & \frac{31}{141} & 0 & \frac{64}{47} & -\frac{17}{47} & 0 & -\frac{44}{47} & -\frac{23}{235} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot
\end{aligned}$$

شکل نردسیک روش‌ها

شکل GLM روش (۴،۳) تا (۶،۳) به صورت نردسیک نیست. در این بخش شکل نردسیک آن‌ها در قالب GLMS به دست می‌آید.

برای این کار، در ابتدا بردارهای ورودی و خروجی که تقریبی برای بردار نردسیک از مرتبه $2k + 1$ هستند، به صورت

$$y^{[n-1]} = \begin{bmatrix} y_1^{[n-1]} \\ y_2^{[n-1]} \\ \vdots \\ y_{2k-1}^{[n-1]} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} y(x_{n-1}) \\ \frac{h}{1!} y'(x_{n-1}) \\ \vdots \\ \frac{h^{(2k+1)}}{(2k+1)!} y^{(2k+1)}(x_{n-1}) \end{bmatrix},$$

$$y^{[n]} = \begin{bmatrix} y_1^{[n]} \\ y_2^{[n]} \\ \vdots \\ y_{2k+2}^{[n]} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} y(x_n) \\ \frac{h}{1!} y'(x_n) \\ \vdots \\ \frac{h^{(2k+1)}}{(2k+1)!} y^{(2k+1)}(x_{n-1}) \end{bmatrix},$$

تعریف می‌کنیم. با استفاده از بسط تیلور، روابط بین $y^{[n-1]}$ و $\tilde{y}^{[n-1]}$ و همچنین $y^{[n]}$ و $\tilde{y}^{[n]}$ به صورت

$$\tilde{y}^{[n-1]} = T y^{[n-1]}, \quad \tilde{y}^{[n]} = T y^{[n]},$$

به‌دست می‌آید، که در آن ماتریس T از بسط تیلور حاصل می‌شود که به عنوان مثال برای $k = 2$ به صورت

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & -32 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 12 & -32 & 80 \end{bmatrix}$$

است. با این تغییر متغیر، روش (۷،۳) با بردارهای ورودی و خروجی در فرم نردسیک، به صورت

$$\begin{bmatrix} Y \\ y^{[n]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & U \\ B & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} hF \\ y^{[n-1]} \end{bmatrix}$$

نوشته می‌شود که در آن $U = \tilde{U}T$ ، $B = T^{-1} \tilde{B}$ و $V = T^{-1} \tilde{V}$ می‌باشد.

به‌عنوان مثال، ماتریس ضرایب برای $k = 2$ و θ های متفاوت به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\theta = \frac{7}{15} \quad (۱)$$

$$\begin{bmatrix} A & U \\ B & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{8}{15} & \frac{64}{225} & \frac{512}{3375} & -\frac{1984}{3375} & \frac{128}{125} \\ \frac{198}{92} & 0 & 0 & 1 & -\frac{97}{92} & -\frac{137}{115} & -\frac{433}{575} & \frac{1551}{575} & -\frac{2669}{575} \\ \frac{3275}{5152} & \frac{25}{168} & 0 & 1 & \frac{433}{2208} & \frac{1}{276} & -\frac{1}{184} & \frac{1}{138} & -\frac{5}{552} \\ -\frac{896}{3275} & -\frac{168}{575} & 0 & 1 & \frac{433}{2208} & \frac{1}{276} & -\frac{1}{184} & \frac{1}{138} & -\frac{5}{552} \\ -\frac{896}{11375} & -\frac{672}{275} & 3 & 0 & \frac{384}{9957} & \frac{48}{623} & -\frac{32}{335} & -\frac{24}{149} & -\frac{96}{1527} \\ \frac{13185}{57375} & -\frac{224}{425} & \frac{4}{3} & 0 & \frac{2944}{16927} & \frac{368}{1363} & -\frac{736}{167} & -\frac{184}{631} & -\frac{736}{3949} \\ -\frac{20608}{10125} & -\frac{672}{25} & \frac{2}{1} & 0 & \frac{8832}{1039} & \frac{1104}{91} & -\frac{736}{3} & -\frac{552}{47} & \frac{2208}{373} \\ -\frac{20608}{224} & -\frac{224}{4} & 0 & 0 & \frac{2944}{368} & \frac{368}{736} & -\frac{736}{184} & -\frac{184}{736} & \frac{736}{736} \end{bmatrix}.$$

$\theta = \frac{5}{16} \quad (۲)$

$$\begin{bmatrix} A & U \\ B & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{16} & \frac{121}{256} & \frac{1331}{4096} & -\frac{2299}{2048} & \frac{765}{4096} \\ \frac{81920}{24651} & 0 & 0 & 1 & -\frac{57269}{24651} & -\frac{799}{2241} & -\frac{2773}{747} & \frac{24637}{2241} & -\frac{40955}{2241} \\ \frac{262144}{435105} & \frac{83}{1465} & 0 & 1 & \frac{29662}{87021} & \frac{461}{7911} & -\frac{64}{2637} & \frac{77}{7911} & -\frac{346}{7911} \\ \frac{262144}{435105} & \frac{83}{1465} & 0 & 1 & \frac{29662}{87021} & \frac{461}{7911} & -\frac{64}{2637} & \frac{77}{7911} & -\frac{346}{7911} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{11507328}{435105} & \frac{1909}{5860} & 3 & 0 & \frac{27005}{348084} & \frac{6565}{15822} & -\frac{1165}{10548} & \frac{1535}{7911} & -\frac{15775}{31644} \\ -\frac{65536}{13185} & -\frac{2739}{5860} & \frac{13}{4} & 0 & \frac{11539}{5274} & \frac{3347}{2637} & -\frac{527}{1758} & \frac{1766}{2637} & -\frac{8645}{5274} \\ \frac{1114112}{43105} & \frac{1411}{5860} & \frac{3}{2} & 0 & \frac{42977}{348084} & \frac{15859}{15822} & -\frac{1549}{10548} & \frac{5606}{7911} & -\frac{49495}{31644} \\ -\frac{65536}{145035} & -\frac{249}{5860} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{7088}{29007} & \frac{544}{2637} & -\frac{16}{879} & \frac{640}{2637} & -\frac{1232}{2637} \end{bmatrix}.$$

$\theta = \frac{3}{4} \quad (۳)$

$$\begin{bmatrix} A & U \\ B & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{64} & -\frac{3}{32} & \frac{128}{125} \\ \frac{768}{155} & 0 & 0 & 1 & -\frac{613}{155} & -\frac{229}{155} & -\frac{11}{155} & \frac{207}{155} & -\frac{85}{31} \\ \frac{1024}{705} & \frac{31}{141} & 0 & 1 & -\frac{158}{235} & -\frac{39}{235} & \frac{16}{235} & \frac{7}{235} & -\frac{6}{47} \\ \frac{1024}{705} & \frac{31}{141} & 0 & 1 & -\frac{158}{235} & -\frac{39}{235} & \frac{16}{235} & \frac{7}{235} & -\frac{6}{47} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5888 & 713 & 3 & 0 & \frac{6219}{940} & \frac{801}{470} & \frac{603}{-940} & \frac{99}{-235} & \frac{287}{-188} \\ -\frac{705}{2816} & -\frac{564}{341} & 13 & 0 & \frac{4957}{470} & \frac{733}{235} & \frac{499}{-470} & \frac{234}{-235} & \frac{287}{188} \\ -\frac{235}{4352} & -\frac{188}{527} & \frac{4}{3} & 0 & \frac{470}{5271} & \frac{235}{919} & -\frac{470}{507} & -\frac{235}{206} & \frac{188}{431} \\ -\frac{705}{256} & -\frac{564}{31} & \frac{2}{1} & 0 & \frac{940}{236} & \frac{470}{88} & -\frac{940}{12} & -\frac{235}{64} & \frac{188}{38} \\ -\frac{235}{235} & -\frac{188}{188} & \frac{4}{4} & 0 & \frac{235}{235} & \frac{235}{235} & -\frac{235}{235} & -\frac{235}{235} & \frac{47}{47} \end{bmatrix}$$

روش پیشگو-اصلاحگر چندگامی با یک نقطه غیرگامی

$$\bullet \quad k = 3 \text{ و } \theta = \frac{5}{16} :$$

$$\begin{aligned} y_{n-\frac{5}{16}} &= -\frac{22914657}{4194303} y_{n-1} + \frac{223729}{65536} y_{n-2} + \frac{12790305}{4194304} y_{n-3} + \frac{14827131}{4194304} h f_{n-1} \\ &\quad + \frac{604683}{1048576} h f_{n-2} + \frac{3792987}{4194304} h f_{n-3}, \\ y_n &= \frac{20466}{503} y_{n-1} - \frac{125469}{6539} y_{n-2} - \frac{134050}{6539} y_{n-3} - \frac{1297359}{71929} h \hat{f}_{n-\frac{5}{16}} - \frac{1297359}{71929} h f_{n-1} \\ &\quad - \frac{731374}{19617} h f_{n-2} - \frac{1723269}{281177} h f_{n-3} \\ y_n &= \frac{3415}{51461} y_{n-1} + \frac{15093}{51461} y_{n-2} + \frac{2213}{51461} y_{n-3} + \frac{67108864}{121705265} h \hat{f}_{n-\frac{5}{16}} + \frac{19617}{257305} h \hat{f}_n \\ &\quad + \frac{324999}{566071} h f_{n-1} + \frac{8597}{51461} h f_{n-2} + \frac{23151}{2212823} h f_{n-3} \end{aligned}$$

فرم GLM روش برای $k = 3$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{22914657}{4194303} & \frac{223729}{65536} & \frac{12790305}{4194304} & 0 & \frac{14827131}{4194304} & \frac{604683}{1048576} & \frac{3792987}{4194304} & 0 \\ \frac{20971520}{9278841} & 0 & 0 & \frac{20466}{503} & -\frac{125469}{6539} & 0 & -\frac{134050}{6539} & -\frac{1297359}{71929} & -\frac{731374}{19617} & -\frac{1723269}{281177} & 0 \\ 67108864 & \frac{19617}{257305} & 0 & \frac{3415}{51461} & \frac{15093}{51461} & \frac{2213}{51461} & 0 & \frac{324999}{566071} & \frac{8597}{51461} & \frac{23151}{2212823} & 0 \\ 121705265 & \frac{19617}{257305} & 0 & \frac{3415}{51461} & \frac{15093}{51461} & \frac{2213}{51461} & 0 & \frac{324999}{566071} & \frac{8597}{51461} & \frac{23151}{2212823} & 0 \\ 67108864 & \frac{19617}{257305} & 0 & \frac{3415}{51461} & \frac{15093}{51461} & \frac{2213}{51461} & 0 & \frac{324999}{566071} & \frac{8597}{51461} & \frac{23151}{2212823} & 0 \\ 121705265 & \frac{19617}{257305} & 0 & \frac{3415}{51461} & \frac{15093}{51461} & \frac{2213}{51461} & 0 & \frac{324999}{566071} & \frac{8597}{51461} & \frac{23151}{2212823} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ U \\ V \end{bmatrix} =$$

فرم نردسپیک $k = 3$

$$\begin{bmatrix} A & U \\ B & V \end{bmatrix}$$

که در آن ماتریس‌های A ، B ، U و V برابر با مقادیر زیر هستند

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{20971520}{9278841} & 0 & 0 \\ \frac{67108864}{121705265} & \frac{19617}{257305} & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & \frac{11}{16} & \frac{121}{256} & \frac{1331}{4096} & \frac{14641}{65536} & \frac{161051}{1048576} & -\frac{5041465}{524288} & \frac{5422990}{1048576} \\ 1 & -\frac{11692979}{9278841} & -\frac{1777909}{843531} & -\frac{619943}{28117} & -\frac{1634549}{8435531} & -\frac{1286069}{843531} & \frac{19465045}{281177} & -\frac{306598009}{8435531} \\ 1 & \frac{9063512}{24341053} & \frac{197689}{2212823} & -\frac{23446}{2212823} & -\frac{47973}{2212823} & \frac{6348}{2212823} & \frac{76157}{2212823} & \frac{129994}{2212823} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \begin{array}{r} 67108864 \\ \hline 121705265 \\ \hline 0 \\ \hline 956452306944 \\ \hline 278826762115 \\ \hline 4382359814144 \\ \hline 836480286345 \\ \hline 1628339658496 \\ \hline 55765352423 \\ \hline 429463175168 \\ \hline 836480286345 \\ \hline 19176357888 \\ \hline 278826762115 \\ \hline 1694498816 \\ \hline 76043662395 \end{array} & \begin{array}{r} 19617 \\ \hline 257305 \\ \hline 0 \\ \hline 1118345553 \\ \hline 2357943020 \\ \hline 1708045651 \\ \hline 2357943020 \\ \hline 95201301 \\ \hline 2357943302 \\ \hline 83692661 \\ \hline 1178971510 \\ \hline 22422231 \\ \hline 2357943020 \\ \hline 7264829 \\ \hline 2357943020 \end{array} & \begin{array}{r} 0 \\ \hline 1 \\ \hline 21601 \\ \hline 6873 \\ \hline 299363 \\ \hline 82476 \\ \hline 4164 \\ \hline 2291 \\ \hline 12589 \\ \hline 41238 \\ \hline 259 \\ \hline 6873 \\ \hline 1009 \\ \hline 82476 \end{array} \end{bmatrix},$$

V =

$$\begin{bmatrix} \begin{array}{r} 9063512 \\ \hline 24341053 \\ \hline 0 \\ \hline 50977661195 \\ \hline 669184229076 \\ \hline 1171270742992 \\ \hline 501888171807 \\ \hline 167997242981 \\ \hline 111530704846 \\ \hline 140091112780 \\ \hline 501888171807 \\ \hline 27169357181 \\ \hline 669184229076 \\ \hline 599089129 \\ \hline 4526197437 \end{array} & \begin{array}{r} 197689 \\ \hline 2212823 \\ \hline 0 \\ \hline 11541867775 \\ \hline 304174644958 \\ \hline 63559686880 \\ \hline 45626197437 \\ \hline 6020223311 \\ \hline 5069577493 \\ \hline 10830321352 \\ \hline 4526197437 \\ \hline 1162462615 \\ \hline 30417464958 \\ \hline 562741202 \\ \hline 45626197437 \end{array} & \begin{array}{r} 23446 \\ \hline 2212823 \\ \hline 0 \\ \hline 2874369155 \\ \hline 20278309972 \\ \hline 4367203153 \\ \hline 15208732479 \\ \hline 1022102547 \\ \hline 10139154986 \\ \hline 382389092 \\ \hline 1528732749 \\ \hline 263570839 \\ \hline 20278309972 \\ \hline 62939113 \\ \hline 15208732479 \end{array} & \begin{array}{r} 47973 \\ \hline 2212823 \\ \hline 0 \\ \hline 3280074245 \\ \hline 15208732479 \\ \hline 3702735228 \\ \hline 45626197437 \\ \hline 4358094925 \\ \hline 5069577493 \\ \hline 12310565488 \\ \hline 4526197437 \\ \hline 354418257 \\ \hline 15208732479 \\ \hline 348930140 \\ \hline 45626197437 \end{array} & \begin{array}{r} 6348 \\ \hline 2212823 \\ \hline 0 \\ \hline 29732306525 \\ \hline 60834929916 \\ \hline 60478655890 \\ \hline 45626197437 \\ \hline 12093941085 \\ \hline 10139154986 \\ \hline 18344135857 \\ \hline 4526197437 \\ \hline 3896420365 \\ \hline 60834929916 \\ \hline 952377715 \\ \hline 45626197437 \end{array} & \begin{array}{r} 76157 \\ \hline 2212823 \\ \hline 0 \\ \hline 552061495 \\ \hline 10139154986 \\ \hline 2384902068 \\ \hline 5069577493 \\ \hline 2425132808 \\ \hline 5066577493 \\ \hline 790528502 \\ \hline 10139154986 \\ \hline 386661405 \\ \hline 10139154986 \\ \hline 637065026 \\ \hline 5069577493 \end{array} & \begin{array}{r} 129994 \\ \hline 2212823 \\ \hline 0 \\ \hline 214458205025 \\ \hline 60834929916 \\ \hline 41827265767 \\ \hline 4562619743 \\ \hline 77640139413 \\ \hline 10139154986 \\ \hline 5264711028 \\ \hline 4562619743 \\ \hline 73617167567 \\ \hline 60834929916 \\ \hline 18588708785 \\ \hline 45626197437 \end{array} \end{bmatrix}$$

نتیجه گیری

قابلیت انعطاف نمایش نردسیک باعث می شود تغییر h امکان پذیر باشد. این مشخصه همراه با روش هیبریدی مرتبه بالا روش قابل توجه را ایجاد می کند. انتخاب ساده $\theta = \frac{7}{15}$ برای حذف وابستگی جمله اصلاحگر انتخاب شد. با افزایش تعداد نقاط غیر گامی r ، رسیدن به یک روش با مرتبه $2k + r$ منطقی به نظر می رسد، موارد $r = 3, 4$ ، توسط بوچر مورد بررسی قرار گرفته است اما هنوز چنین روش هایی در فرم نردسیک مورد آزمون قرار نگرفته اند. پیش بینی هایی در افزایش k و تغییر مقدار θ به عمل آمده است. بسیاری از این ایده ها توسط Beaudet و دیگران، بدون نمایش نردسیک، مورد بررسی قرار گرفته اند.

مراجع

- [۱] ع.عبدی. توسیع روش‌های خطی عمومی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی، رساله دکتری، دانشگاه تبریز، ۱۳۹۱.
- [2] K. Atkinson, W. Han, D. Stewart, Numerical Solution of Differential Equation. J. Wiley, New York, 1997.
- [3] C. T. Baker and M. S. Keech, Stability Regions in the Numerical Analysis. SIAM J. Numer. Anal., (15) 1978.
- [4] J. C. Butcher, diagonally implicit multistage integration methods. Appl. Numer. Math., (11) 347-363, 1993.
- [5] J. C. Butcher, A. E. O'Sullivan, Nordsieck methods with an $o(\Delta t)$ -step point. Algorithms, (31) 87-101, 2002.
- [6] J. C. Butcher, A Modified multistep method for the numerical integration of ordinary differential equations. J. Assoc. Comput. Mach, (12) 124-135, 1965.
- [7] J.C. Butcher, Z. Jackiewicz, diagonally implicit general linear methods for ordinary differential equations, BIT., (33) 452-472, 1993.
- [8] J. C. Butcher. Numerical Methods for Differential Equations. Wiley, Newyork, 2008.
- [9] J.C. Butcher, P. Chartier, Z. Jackiewicz, Nordsieck representation of DIMSIMs, Numer. Algorithms. (16) 209-230, 1997.
- [10] J.C. Butcher, Z. Jackiewicz, Construction of diagonally implicit general linear methods type 1 and type 2 for ordinary differential equations, Appl.Numer. Math., (21) 385-415, 1996.
- [11] J.C. Butcher, Z. Jackiewicz, Implementation of diagonally implicit multistage integration methods for ordinary differential equations. SIAM J. Numer. Anal (34) 2119-2141, 1997.
- [12] J.C. Butcher, Z. Jackiewicz, Construction of high order diagonally implicit multistage integration methods for ordinary differential equations. Appl. Numer. Math. (27) 1-12, 1998.
- [13] J.C. Butcher, Z. Jackiewicz, A reliable error estimation for diagonally implicit multistage integration methods. BIT., (41) 656-665, 2001.
- [14] J.C. Butcher, Z. Jackiewicz, Error estimation for Nordsieck methods, Numer. Algorithms. (31) 75-85, 2002.
- [15] J.C. Butcher, A.T. Hill. Linear multistep methods as irreducible general linear methods, BIT., (46) 5-19, 2006.
- [16] J. R. Cash. On the exponential fitting of composite multiderivative linear multistep methods, SIAM J. Numer. Anal., (18) 808-821, 1981.
- [17] G. Dahlquist. A special stability problem for linear multistep methods. BIT, (3) 27-43, 1963.
- [18] B. L. Ehle. A special stability problem for linear multistep methods. BIT, (3) 27-43, 1963.
- [19] W. H. Enright. A-stable methods and Pad'e approximations to the exponential. SIAM J. Math. Anal., (4) 671-680, 197.
- [20] W. C. Gear. Numerical initial value problems in ordinary differential equations. Prentic-Hall Inc, Englewood Cliffs, 1971.
- [21] E. Hairer, Solving Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems. Springer, Berlin, 1991.
- [22] P. Henrici. Discrete variable methods in ordinary differential equations. Wiley, New York, 1962.
- [23] Z. Jackiewicz. Implementation of DIMSIMs for stiff differential systems, Appl. Numer, Math. (42) 251-267, 2002.

- [24] Z. Jackiewicz, General Linear Methods for Ordinary Differential Equations, Wiley, New Jersey, 2009.
- [25] J. D. Lambert, Numerical Methods for Ordinary Differential Systems The Initial Value Problems. John Wiley and Sons Ltd., Chichester, 1991.
- [26] J. D. Lambert, Computational Methods in Ordinary Differential Equations. John Wiley, New York, 1973.
- [27] W. M. Wright. The Construction of order 4 DIMSIMs for ordinary differential equations. Numer. Algor., (26) 123-130, 2001.
- [28] W. E. Milne, Numerical calculus. Princeton University Press, London, 1949.
- [29] W. E. Milne, Numerical Solution of Differential Equations . John Wily and Sons, 1953.
- [30] J. Stoer, R. Bulirsch. Introduction to Numerical Analysis. Springer-Verlage(second edition), 1991.