مطالعات علوم کاربردی در مهندسی

دوره ۲، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۵

صفحات ۴۲- ۲۶

Online ISSN: ٢٤٧٦-٤٥٠٧

Print ISSN: ٢٥٣٨-٢٠٥٥

www.irijournals.com

اثبات مسائل مربوط به نامساوی‌ها درعلم ریاضی

پروانه میرزایی

دانش آموخته کارشناسی‌ارشد ریاضی‌محض، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شمال، مدرس دانشگاه علمی کاربردی شهرستان آبدانان، دبیر ریاضی دبیرستان‌های متوسطه دوم شهرستان آبدانان

چکیده

پرواضح است که مباحث مختلف ریاضی و تنوع روش‌های متفاوت حل مسائل آن بسیارزیاد است. که گاهی تمرکز لازم روی مطالب و موضوعاتی که تا حد زیادی ذهن را برای حل یک مساله هدایت می‌کنند مشکل است. البته گاهی هم به خاطر عدم آشنایی با روش‌های حل مسائل درحل آن ناکام می‌شویم. یکی از این مباحث، نامساوی‌ها می‌باشد که در همه زمینه‌های ریاضی وجود دارند و مسائل مربوط به نامساوی‌ها از جذاب‌ترین مسائل به شمار می‌آیند.در این مقاله روش‌هایی که بیشتر مواقع درحل نامساوی‌ها، موفق بوده‌اند را مورد بررسی قرار می‌دهیم. هرچند که ریاضیات یک هنرخلاقه است. و برای هر مسئله‌ای می‌توان راه حل‌های زیادی ارائه داد.

واژه‌های کلیدی: نامساوی‌ها، اثبات، ریاضی.

مقدمه

ریاضیات عموما مطالعه الگوی ساختار، تحول، و فضا تعریف شده است؛ بصورت غیررسمی‌تر، ممکن است بگویند مطالعه اعداد و اشکال است.تعریف ریاضیات برحسب وسعت دامنهٔ آن و نیز بسط دامنهٔ فکر ریاضی تغییر کرده است. ریاضیات زبانی خاص خود دارد،که درآن به جای کلمات و علائم نقطه‌گذاری از اعداد و نمادها استفاده می‌شود. درمنظر صاحبان‌فکر، تحقیق بدیهیات ساختارهای مجرد تعریف شده، با استفاده از منطق و نمادسازی ریاضی می‌باشد. ساختارهای بخصوصی که در ریاضیات مورد تحقیق و بررسی قرار می‌گیرند اغلب درعلوم طبیعی منشاء دارند، و بسیارعمومی درفیزیک، ولی ریاضیات ساختارهای دلایلی را نیز بررسی می‌نماید که بصورت خالص درمورد باطن ریاضی است، زیرا ریاضیات می‌توانند برای مثال،یک عمومیت متحدشده را برای زیرمیدان‌های متعدد، یاابزارهای مفید را برای محاسبات عمومی، فراهم نماید.

در نهایت،ریاضیدانان بسیاری در مورد مطالبی که مطالعه می‌نمایند که منحصرا دلایل علمی محض داشته، ریاضیات را بصورت هنری برای پروراندن علم،صرف نظر از تجربی یا کاربردی، می‌نگرند.حساب، علم اعداد است.واژه انگلیسی حساب، از کلمه‌ای یونانی به معنای اعداد گرفته شده است.درآغاز شهرنشینی، انسان گوسفندان، گاوها و سایر حیوانات خود را با انگشتانش می‌شمرد. در واقع کلمهٔ دیژیت که برای شمارش اعداد از ۰ تا ۹ به کار می‌رود، از یک کلمهٔ لاتین به معنای انگشت گرفته شده است.بعدها انسان با علامت زدن روی چوب یا درخت، اشیاء را می‌شمرد. اما این روش به زودی جای خود را به استفاده از علامت‌هایی باری هریک ازاعداد داد. هندسه مطالعه انواع مختلف اشکال و خصوصیات آنهاست. همچنین مطالعه ارتباط میان اشکال، زوایا و فواصـل است.

نامساوی‌ها یکی ازمهمترین حوزه‌های پژوهشی آنالیز ماتریسی هستند که ازابتدا موردعلاقه بسیاری از ریاضی‌دانان بوده و کاربردهایی درعلوم مختلف ازجمله محاسبات علمی، نظریه سیستم و کنترل، تحقیق در عملیات، فیزیک ریاضی، استاتیک، اقتصاد و مهندسی دارد. نخستین بار درسال ۱۹۳۴ کتاب تقریبا جامعی با نام "نامساوی‌ها"توسط هاردی، لیتل وود و پولیا نگاشته شد. از آن پس، تلاش‌های زیادی برای چاپ و نشر کتاب،رساله و مقاله درحوزه نامساوی‌های ریاضی صورت گرفت.قریبا کلیه محاسبات با نوعی از تقریب سروکار دارند بنابراین هرچقدر نامساوی‌ها تیزتر گردند به همان اندازه تقریبات مربوطه بهتر خواهند شد. درنتیجه کشف نامساوی‌های جدید تیزترکردن نامساوی‌ها و همچنین تعمیم نامساوی‌های کلاسیک در برآورد و دقیقتر کردن محاسبات به ما کمک خواهند کرد.

پیشینه پژوهش

- رساله دکترا«نامساوی‌های عملگری دانکل- ویلیامز»۱۳۹۰.دانشگاه فردوسی مشهد،دانشکده علوم ریاضی،فرزاددادی پور
- رساله دکترا «نامساوی‌ها وکاربردها»، ۱۳۸۰، دانشگاه تربیت معلم، جمال روئین.
- رساله دکترا«نامساوی‌ها نرمی برای عملگرها»،۱۳۹۳،دانشگاه فردوسی، دانشکده ریاضی، مجتبی باخرد.
- رساله دکترا«نامساوی‌های یانگ ماتریسی» ۱۳۹.دانشگاه شهید باهنر کرمان، دانشکده ریاضی و رایانه، عالمه شیخ حسینی.
- پایان‌نامه کارشناسی ارشد«مروری برفلسفه علم‌ریاضی»۱۳۷۵.دانشگاه شهیدباهنر کرمان.دانشکده ریاضی و کامپیوتر بخش ریاضی، رضا قاسم پور دباغی.
- پایان‌نامه کارشناسی ارشد«برخی نامساوی‌ها در فضاهای نرم دار خطی»،۱۳۹۴، دانشگاه صنعتی شیراز، دانشکده ریاضی، سمیرا هاشم پور.

- پایان‌نامه کارشناسی ارشد«نامساوی‌ها برای عملگرهای فشرده»،۱۳۸۷ دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده علوم ریاضی،الهه زهدی‌نژاد.
- پایان‌نامه کارشناسی ارشد«استقرای ریاضی و احتمال استقرایی- منطقی»،۱۳۸۹، دانشگاه تربیت مدرس،علی بیگدلی.
- مقاله«خواص نامساوی‌ها»،احمد قندهاری،۱۳۹۲ مجله ریاضی دوره آموزش متوسطه،شماره۳ دوره۲۲.

تاریخچهٔ ریاضیات

انسان اولیه نسبت به اعداد بیگانه بود و شمارش اشیاء اطراف خود را به حسب غریزه یعنی همانطور که مثلاً مرغ خانگی تعداد جوجه‌هایش را می‌داند انجام می‌داد. اما بزودی مجبور شد وسیلهٔ شمارش دقیقتری بوجود آورد. لذا، به کمک انگشتان دست دستگاه شماری پدید آورد که مبنای آن ۶۰ بود. این دستگاه شمار که بسیار پیچیده می‌باشد قدیمی‌ترین دستگاه شماری است که آثاری از آن در کهن‌ترین مدارک موجود یعنی نوشته‌های سومری مشاهده می‌شود.سومریها که تمدنشان مربوط به حدود هزارسال قبل از میلاد مسیح است درجنوب بین‌النهرین، یعنی ناحیه بین دو رود دجله و فرات ساکن بودند. آنها درحدود ۲۵۰۰ سال قبل از میلاد با امپراطوری سامی، عکاد متحد شدند و امپراطوری و تمدن آشوری را پدید آوردند.

نخستین دانشمند معروف یونانی طالس ملطلی (۶۳۹_۵۴۸ق.م) است که در پیدایش علوم نقش مهمی بعهده داشته و می‌توان ویرا موجد علوم فیزیک ، نجوم و هندسه «تشابه» به او کاملاً بی‌اساس است. در اوایل قرن ششم ق.م. فیثاغورث (۵۷۲_۵۰۰ قبل از میلاد) از اهالی ساموس یونان کم‌کم ریاضیات را بر پایه و اساسی قرار داد و به ایجاد مکتب فلسفی خویش همت گماشت. فیثاغورثیان عدد را بخاطر هم‌آهنگی و نظمی که دارد اساس ومبدأ همه چیز می‌پنداشتند و بر این عقیده بودند که تمام مفاهیم را به کمک آن می‌توان بیان نمود. پس از فیثاغورث باید از زنون فیلسوف و ریاضیدان یونانی که در ۴۹۰ق.م در ایلیا متولد شده است نام ببریم. در اوایل نیمه دوم قرن پنجم بقراط ازاهالی کیوس فضاهایی متفرق آن زمان را گردآوری کرد و در حقیقت همین قضایا است که مبانی هندسهٔ جدید ما را تشکیل می‌دهند. در قرن چهارم قبل از میلاد افلاطون در باغ آکادموس درآتن مکتبی ایجاد کرد که نه قرن بعداز او نیز همچنان برپا ماند. وی ریاضیات مخصوصاً هندسه را بسیار عزیز می‌داشت،تا جائی که برسردر مکتب خود این جمله را حک کرده بود: «هرکس هندسه نمی‌داند به اینجا قدم نگذارد».این فیلسوف بزرگ به تکمیل منطق که رکن اساسی ریاضیات است همت گماشت و چندی بعد منجم و ریاضیدان معاصر وی ادوکس با ایجاد تئوری نسبت‌ها نشان داد که کمیات اندازه نگرفتنی که تا آن زمان در مسیر علوم ریاضی گودالی حفرکرده بود هیچ چیز غیر عادی ندارد و می‌توان مانند سایر اعداد قواعد حساب را در مورد آنها بکار برد.

درقرن دوم ق.م نام تنها ریاضیدانی که بیش از همه تجلی داشت ابرخس یا هیپارک بود. این ریاضیدان و منجم بزرگ که بین سالهای ۱۶۱تا ۱۲۶ق.م در رودس متولد شد گامهای بلند و استادانه‌ای در علم نجوم برداشت و مثلثات را نیز اختراع کرد. در نخستین قرون تاریخ چهار ریاضی‌دان مشهور در این کشور وجود داشت که عبارت بودند از:

آپاستامبا(قرن پنجم)، آریاب هاتا (قرن ششم)، براهماگوپتا (قرن هفتم) و بهاسکارا (قرن نهم) که در کتب ایشان بخصوص قواعد تناسب ساده و ربح مرکب مشاهده می‌شود. محاسبات در این کتابها جنبه شاعرانه داشت و حتی نام علم حسابرا «لیلاواتی» گذارده بودندکه معنی دلبری و افسونگری دارد! با شروع قرن دهم پیشرفت کشفیات ریاضی در هندوستاننیز متوقف گردید و مشعل فروزان علم بدست اعراب افتاد. در سال ۶۲۲م که حضرت محمدصلی الله علیه و آله وسلماز مکه هجرت فرمود در واقع آغاز شگفتی تمدن اسلام بود. اعراب که جنبش شدید خودرا از سدهٔ هفتم آغاز کرده بودند پس از رحلت پیغمبر اسلام در ۶۳۲ به توسعه سرزمینهای خود پرداختند و بزودی تمام ممالک آفریقائی ساحل مدیترانه را متصرف شدند و این توسعه‌طلبی ایشان

را در اروپا تا اسپانیاو در آسیاتا هندوستان کشانید و در نتیجه تماس با کشورهای مغلوب که مردم آنها غالباً دارای تمدن عالی بودند ذوق شدیدی به آموختن در ایشان بوجود آمد. لذا با سهولت وچالاکی فرهنگ ممالک دست نشانده را پذیرفتند. http://www.daneshriazi.blogfa.com

الف) استقراری ریاضی

یکی ازاصول مهمی که دراثبات برخی ازقضایای اساسی منطق جدید وبسیاری از قضایای ریاضیات از آن بهره می‌گیرند اصل استقرای ریاضی است. حال سوال این است که آیا این اصل بدیهی است؟علی‌الظاهر شهودهای عرفی، بداهت آن را تایید نمی‌کنند. لذا وضوح برهان قضایای مبتنی بر اصل فوق نیز مورد تردید و توجیه برهان چنین قضایایی، مشروط به اذعان بردرستی اصل استقرای ریاضی خواهدبود. ما گمان می‌کنیم اصل فوق باتکیه براصول اعدادحقیقی درریاضیات قابل اثبات می‌باشد.

ودیگر این که به طور کلی دو نوع استدلال در اندیشهٔبشری دیده می‌شود: قیاسی و استقرایی. درنوع اول تکیه براین است نفی نتیجه دراستدلال به تناقض منجرمی‌شود ولی در نوع دوم بین مقدمات ونتیجهٔاستدلال ضرورتی نیست.واین مهمترین رخنه دلیل استقرایی است. لذا نتیجه به جای اثبات،با روی کردهای مختلف تأیید می‌گردد. یکی از این رویکردها،حساب احتمالات می‌باشد، این رویکرد از آنجا ناشی می‌شود که عقل عملی انسان دررفتار روزانه خوداغلب نسبت به احتمالات قوی وضعیف واکنش نشان ونسبت به آنها ترتیب اثر می‌دهد. مواجهه حساب احتمالات با مسئله استقرا نیز براصول و قوانین خاصی استوار است ما چگونگی رسیدن به این قوانین را به زبان ساده تقریر می‌کنیم.(بیگدلی،۱۳۸۹:۸).

مثال:

ثابت کنید ،میانگین حسابی n عدد مثبت، از میانگین هندسی آنها کوچکتر نیست . (نابرابری کوشی).

راه‌حل:

$a1$و $a2$ و $a3 \ldots an$ را عددهایی مثبت می‌گیریم باید ثابت کنیم :

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}$$

۱) برای $n=2$ درستی نابرابری کوشی روشن است، زیرا :

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} \rightarrow \left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}\right)^2 \geq 0$$

۲) گام استقرایی را نه به صورت(عبور از k به k+1) بلکه به صورت(عبور از k به 2k) بر می‌داریم یعنی ثابت می‌کنیم، به فرض درستی نابرابری برای $n=k$ نابرابری برای $n=2k$ هم درست است. وقتی نابرابری میانگین‌ها برای k عدد درست باشد ، برای میانگین حسابی 2k عدد می‌توان نوشت :

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2k-1}+a_{2k}}{2k} =$$

$$\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}+\cdots+\frac{a_{2k-1}+a_{2k}}{2}}{k}=$$

$$\geq \sqrt[k]{\frac{a_1+a_2}{2}\times\frac{a_3+a_4}{2}\times\ldots\frac{a_{2k-1}\times a_{2k}}{2}}$$

$$\geq \sqrt[k]{\sqrt{a_1a_2}\times\sqrt{a_3a_4}\times\ldots\sqrt{a_{2k-1}\times a_{2k}}}$$

$$=\sqrt[2k]{a_1a_2a_3a_4\ldots a_{2k}}$$

از آنجا که درستی نابرابری را برای n=2 ثابت کردیم ،با توجه به اثبات اخیر ،نابرابری میانگین برای $n=4$ و $n=8$ و............= $2^m n$ هم درست است.$(m\in N)$

اکنون درستی نابرابری کوشی را، برای هرمقدار طبیعی n ثابت می‌کنیم .

q را کوچکترین عدد می‌گیریم که اگر به n اضافه شود،در مجموع توانی از ۲ بدست آید؛ یعنی :

$$(m\in N)n+q=2^m$$

بنابر آن چه ثابت کردیم ،نابرابری کوشی، برای $n+q$ درست است یعنی :

$$(1)\ \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+q}}{n+q}\geq \sqrt[n+q]{a_1a_2\ldots a_na_{n+1}\ldots a_{n+q}}$$

این نابرابری ،برای عددهای طبیعی و دلخواه a_iدرست است . اگر فرض کنیم :

$$a_{n+1}=a_{n+2}=\cdots=a_{n+q}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

و برای سادگی کار ،میانگین حسابی بین عددهای از a_1تاa_nرا s و میانگین هندسی بین آنها را p بنامیم نابرابری (۱) به این صورت در می‌آید :

$$\frac{ns+qs}{n+q}\geq \sqrt[n+q]{p^n.s^q}\rightarrow s\geq \sqrt[n+q]{p^n.s^q}$$

دو طرف نابرابری اخیر را به توان $(n+q)$ می‌رسانیم :

$$s^{n+q}\geq p^n.s^q\rightarrow s^n\geq p^n\rightarrow s\geq p$$

درستی نابرابری کوشی ،برای هر عدد طبیعی n ثابت شد .

استقرای کامل(قیاس متمم):

مثال :

ثابت کنید : برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ داریم :

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

حل:

(۱): در حالت $n = 2$ باید ثابت کنیم :

$$|a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2| \text{(۱)}$$

حالت‌های ممکن را بررسی می‌کنیم (استقرای کامل)

الف): اگر یکی از دو عدد a_1 و a_2 یا هر دوی آنها برابر صفر باشد ،رابطه (۱) درست است.(نابرابری به برابری تبدیل می‌شود).

ب): اگر a_1و a_2 مخالف صفر و در ضمن ،هم علامت باشند (هردو مثبت یا هردو منفی) ،باز هم رابطه (۱) به برابری تبدیل می‌شود.

ج): اکنون فرض می‌کنیم $a_1 > 0$ و $a_2 < 0$ ، و بی آن که به کلی بودن مساله لطمه‌ای وارد شود .

$$\acute{a}_2 = -a_2 . |a_1| > |a_2|$$

به دست می‌آید:

$$|a_1 + a_2| = |a_1 - \acute{a}_2| = a_1 - \acute{a}_2$$

$$|a_1| + |a_2| = |a_1| + |-\acute{a}_2| = a_1 + \acute{a}_2$$

و روشن است که $a_1 - \acute{a}_2 < a_1 + \acute{a}_2$ (تفاضل دو عدد مثبت از مجموع آنها کوچکتر است).

۲)فرض می‌کنیم ،نابرابری برای $n = k$درست باشد ؛ یعنی داشته باشیم :

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_k| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k| (2)$$

و ثابت می‌کنیم در این صورت ، برای $n = k + 1$ هم ، درست است، داریم :

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}| = |(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + a_{k+1}|$$

$$\leq |a_1 + a_2 + \cdots + a_k| + |a_{k+1}| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k| + |a_{k+1}|$$

ب) قضیه مقدار میانگین :

مثال۱:

ثابت کنید که به ازای $0 \leq a < b < \frac{1}{2}\pi$

$$\frac{b-a}{cos^2a} < tgb - tga < \frac{b-a}{cos^2b}$$

حل :

تابع $f(x) = tgx$ راروی $[a, b]$ در نظر بگیرید. بنابرقضیه مقدار میانگین، نقطه‌ای چون $C \in (a, b)$ وجود دار د به طوری‌که :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = \acute{f}(c)$$

در این حالت تساوی بالا به معنی آن است که برای مقداری مانند c در (a, b) داریم :

$$\frac{tgb - tga}{b-a} = sec^2c$$

نامساوی مورد نظر از این حقیقت نتیجه می‌شود که به ازای $0 \leq a < b < \frac{1}{2}\pi$

$$bsec^2a < sec^2c < sec^2$$

مثال۲ :

اگر $0 < a < b$ و تعریف کنیم $A = \frac{lnb-lna}{b-a} - \frac{1}{a}$ و $B = \frac{lnb-lna}{b-a} - \frac{1}{b}$

آنگاه $A < 0 < B$

حل:

تابع $f(x) = lnx$ را در فاصله $[a, b]$ در نظر می‌گیریم آنگاه $\exists C\in (a, b)$

به طوری‌که :

$$lnb - lna = \acute{f}(c)(b-a)$$

چون : $\acute{f}(c) = \frac{1}{c}$ و همواره $\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$

لذا: $\frac{1}{b}(b-a) < lnb - lna < \frac{1}{a}(b-a)$

پس : $0 < A = \frac{lnb-lna}{b-a} - \frac{1}{a}$

$$B = \frac{lnb - lna}{b-a} - \frac{1}{b} > 0$$

پس : $A < 0 < B$

پ): نامساوی میانگین حسابی– میانگین هندسی

مثال :

نشان دهید برای هر عدد حقیقی مثبت a, b, c داریم :

$$(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)\geq 9a^2b^2c^2$$

حل:

با استفاده از نامساوی میانگین حسابی –میانگین هندسی داریم :

$$(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)\geq \left(3\sqrt[3]{a^3b^3c^3}\right)\left(3\sqrt[3]{a^3b^3c^3}\right)=9a^2b^2c^2$$

مثال:

فرض کنید a, b, c اضلاع یک مثلث باشند ثابت کنید .

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leq 3abc$$

حل :

فرض کنید $x=b+c-a$ و $y=c+a-b$ و $z=a+b-c$

توجه کنید که x, y, z مثبت هستند زیرا a, b, c اضلاع یک مثلث‌اند در اینصورت :

$\frac{z+x}{2}=c$ و $\frac{y+z}{2}=a$ و $\frac{x+y}{2}=b$

طبق نامساوی میانگین حسابی – میانگین هندسی :

$$\frac{z+x}{2}\geq\sqrt{zx} \quad \text{و} \quad \frac{y+z}{2}\geq\sqrt{yz} \quad \text{و} \quad \frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$$

بنابراین :

$$\frac{z+x}{2}\geq xyz\frac{y+z}{2}\times\frac{x+y}{2}\times$$

که بعد ازجایگذاری، نتیجه می‌دهد :

$$abc\geq(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

وقتی عامل‌های سمت راست را درهم ضرب کنیم، می‌توانیم جمله‌ها را طوری مرتب کنیم که نامساوی به شکل زیر به دست می‌آید .

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)-2abc\leq abc$$

و در نتیجه:

$$\mathrm{a}^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \le 3abc$$

مثال:

ثابت کنید که اگر a,b,c عددهای صحیح مثبتی باشند که:

$$(1+a)(1+b)(1+c)=8$$

آنگاه $abc \le 1$

حل :

می‌دانیم که

$$1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=8$$

بنا به نامساوی حسابی و هندسی، داریم :

$$, \quad a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc} ab+bc+ca \ge 3\sqrt[3]{(abc)^2}$$

که در هر دوی آنها تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار است که $a=b=c$ بنابراین :

$$8 \ge 1+3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt[3]{(abc)^2}+abc=\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3$$

و در نتیجه :

$$\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3 \le 8$$

به عبارتی :

$$1+\sqrt[3]{abc} \le 2$$

در نتیجه خواهیم داشت :

$$abc \le 1$$

ت: نامساوی کوشی – شوارتز

مثال:

اگر $a,b,c>0$ باشد ،آیا درست است بگوییم که نامساوی $a\cos^2\theta+b\sin^2\theta<c$، نامساوی $\sqrt{a}\cos^2\theta+\sqrt{b}\sin^2\theta<\sqrt{c}$ را ایجاب می‌کند ؟

حل:

بنابر نامساوی کوشی – شوارتز

$$\sqrt{a}\,cos^2\theta + \sqrt{b}sin^2\theta \le \left[\left(\sqrt{a}\,cos\theta\right)^2 + \left(\sqrt{b}\,sin\theta\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[cos^2\theta + sin^2\theta\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(acos^2\theta + bsin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}} < \sqrt{c}$$

مثال :

فرض کنید p نقطه‌ای درون مثلث ABC و r_1وr_2وr_3 به ترتیب فاصله‌های p از ضلعهایa_1وa_2وa_3 از مثلث باشند، فرض کنید R شعاع دایره محیطی ABC نشان دهید که :

$$\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} \le \frac{1}{\sqrt{2R}}\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

و نامساوی وقتی و فقط وقتی برقرار است که ABC متساوی‌الاضلاع و P مرکز دایره محاطی آن باشد .

حل:

بنابر نامساوی کوشی- شوارتز داریم :

$$\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} = \sqrt{a_1 r_1}\sqrt{\frac{1}{a_1}} + \sqrt{a_2 r_2}\sqrt{\frac{1}{a_2}} + \sqrt{a_2 r_2}\sqrt{\frac{1}{a_2}}$$

$$\le \left(a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

و تساوی وقتی برقرار است که :

$$\frac{\sqrt{a_1 r_1}}{\sqrt{\frac{1}{a_1}}} = \frac{\sqrt{a_2 r_2}}{\sqrt{\frac{1}{a_2}}} = \frac{\sqrt{a_3 r_3}}{\sqrt{\frac{1}{a_3}}}$$

یا به طور معادل وقتی و فقط وقتی که :

$${a_1}^2 r_1 = {a_2}^2 r_2 = {a_3}^2 r_3$$

توجه می‌کنیم که درنامساوی آخر $a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3 = 2A$ که در آنA مساحت مثلث است. همچنین می‌دانیم که مساحت مثلث بر حسب شعاع دایره محیطی R به وسیله فرمول زیر بیان می‌شود :

$$A = \frac{a_1 a_2 a_3}{4R}$$

دوره ۲، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۵، صفحات ۴۲- ۲۶

در نتیجه: $\frac{a_1a_2a_3}{2R}$ $=$ $a_1r_1 + a_2r_2 + a_3r_3$ و داریم :

$$\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3} \le \left(\frac{a_1a_2a_3}{2R}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{a_1a_2a_3}{2R}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2}{a_1a_2a_3}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2R}}(a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2)^{\frac{1}{2}}$$

حال باز هم با استفاده از نامساوی کوشی – شوارتز داریم :

$$a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2 \le \left(a_2^2+a_3^2+a_1^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(a_3^2+a_1^2+a_2^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)$$

و تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار می‌شود که :

$$\frac{a_2}{a_3}=\frac{a_3}{a_1}=\frac{a_1}{a_2}(=(a_2+a_3+a_1)(a_3+a_1+a_2)=1)$$

معدلاً تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار می‌شود که $a_1=a_2=a_3$

بنابراین داریم :

$$\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3} \le \frac{1}{\sqrt{2R}}(a_1^2+a_2^2+a_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

و تساوی وقتی و فقط برقرار می شود که :

$$a_1^2r_1 = a_2^2r_2 = a_3^2r_3$$

یعنی اگر و فقط اگر :

$a_1=a_2=a_3$ و $r_1=r_2=r_3$

ث)کاربرد سریها :

مثال۱:

نشان دهید که به ازای هر xداریم :

$1+x+\frac{x^2}{21}+\dots+\frac{x^{2n}}{(2n)} > 0$

حل):

وقتی که x مثبت یا صفر باشد،ادعای مساله درست است .فرض کنید که x عددی‌منفی و x عددی صحیح و نامنفی باشد به طوری که :

$$1 \leq |x| \leq \left|\frac{x^2}{2}\right| \leq \cdots \leq \left|\frac{x^k}{k_!}\right|$$

و

$\cdots \geq \left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right| \geq \left|\frac{x^k}{k!}\right|$. هر گاه $2n \leq k$ حکم مساله درست است.درحالی که اگر $2n > k$ استدلال مساله ایجاب می‌کند :

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = e^x > 0$$

مثال:

ثابت‌کنیدکه‌وقتی$x > 0$ آنگاه $(2 + cosx)x > 3sinx$

حل:

به ازای$x > 0$ در طرف چپ نامساوی مورد نظر داریم :

$$(2 + cosx)x > \left(2 + 1 - \frac{x^2}{21} + \frac{x^4}{41} - \frac{x^6}{61}\right)x$$

ودر طرف راست آن

$$3sinx < 3\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم که :

$$3x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{6!} > 3\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)$$

این نامساوی به ازای $x > 0$ برقرار است اگر و فقط اگر

$$\frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{6!} > \frac{3x^5}{5!}$$

$$\left(\frac{1}{4!}-\frac{3}{5!}\right)>\frac{1}{6!}x^2$$

$$=12x^2<6!\left(\frac{2}{51}\right)$$

این نامساوی موردنظر را به ازای $0<x<\sqrt{12}$ ثابت می‌کندولی به ازای $x\geq\sqrt{12}$ برقراری نامساوی بدیهی است و در نتیجه حکم به ازای هر $x>0$ برقرار است و برهان کامل است.

مثال:

ثابت کنید که اگر $0<x\leq\frac{\pi}{2}$ آنگاه $\left(\frac{sinx}{x}\right)^3\geq cosx$

حل:

$$\left(\frac{sinx}{x}\right)^3>\left(1-\frac{x^2}{3!}\right)^3=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{216}$$

و

$$cosx=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}$$

پس کافی است نشان دهیم که :

$$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{216}>1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}$$

یا معادلاً :

$$\frac{1}{4!}+\left(-\frac{1}{216}+\frac{1}{720}\right)x^2-\frac{1}{8!}x^4>0$$

طرف چپ روی بازه $\left(0,\frac{1}{2}\pi\right]$ نزولی و در نتیجه مقدار مینیمم خود را به ازای $x=\frac{\pi}{2}$ می‌گیرد. به ویژه به ازای $0<x\leq\frac{1}{2}\pi$، داریم :

$$\frac{1}{4!}+\left(-\frac{1}{216}+\frac{1}{720}\right)x^2-\frac{1}{8!}x^4\geq\frac{1}{4!}+\left(-\frac{1}{216}+\frac{1}{720}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-\frac{1}{8!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4$$
$$>\frac{1}{4!}+\left(-\frac{1}{216}\right)(2)^2-\frac{1}{8!}(2)^2>0$$

این برهان را کامل می‌کند .

ج) نامساوی تجدید آرایش :

تعریف: سه تایی‌های (a_1,a_2,a_3) و (b_1,b_2,b_3) را

<u>الف</u>: متشابهاً مرتب شده می‌نامیم اگر هر دو افزایشی

(یعنی $(a_1 \leq a_2 \leq a_3\ ,b_1 \leq b_2 \leq b_3)$ یا هر دو کاهشی

$(a_1 \geq a_2 \geq a_3\ ,\ b_1 \geq b_2 \geq b_3)$ باشند .

<u>ب</u>: متضاد مرتب شده می‌نامیم اگر یکی از آنها افزایشی و دیگری کاهشی باشند.

<u>قضیه</u> : فرض کنید (a_1, a_2, a_3) و (b_1, b_2, b_3) سه تایی‌هایی از اعداد حقیقی

و (x_1, x_2, x_3) یک تجدید آرایش از (b_1, b_2, b_3) باشد در اینصورت :

<u>الف</u>: اگر (a_1, a_2, a_3) و (b_1, b_2, b_3) متشابهاً مرتب شده باشند آنگاه:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \geq a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

<u>ب</u>: اگر (a_1, a_2, a_3) و (b_1, b_2, b_3) متضاد مرتب شده باشند آنگاه :

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \leq a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

<u>مثال:</u>

اگر $a, b, c > 0$ آنگاه $\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

<u>حل:</u>

فرض می‌کنیم $a \leq b \leq c$ در اینصورت به وضوح سه‌تایی $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ و $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$

متشابه‌ها مرتب شده هستند لذا طبق قضیه فوق خواهیم داشت :

$$\frac{1}{a}.\frac{1}{a} + \frac{1}{b}.\frac{1}{b} + \frac{1}{c}.\frac{1}{c} \geq \frac{1}{a}.\frac{1}{b} + \frac{1}{b}.\frac{1}{c} + \frac{1}{c}.\frac{1}{a}$$

<u>در نتیجه</u> : $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{a+b+c}{abc}$

<u>مثال:</u>

نامساوی چبی شف(chebyshev)

اگر (a_1, a_2, a_3) و (b_1, b_2, b_3) متشابهاً مرتب شده باشند آنگاه

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{3} \geq \left(\frac{a_1, a_2, a_3}{3}\right)\left(\frac{b_1, b_2, b_3}{3}\right)$$

حل:

با استفاده از نامساوی تجدید آرایش داریم :

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \geq a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \geq a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_2$$

با جمع این نامساوی‌ها داریم :

$$3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \geq (a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)$$

حال با ضرب $\frac{1}{9}$در طرفین ، نتیجه‌ی مطلوب به دست می‌آید .

حالت تساوی برقرار اگر $a_1 = a_2 = a_3$یا$b_1 = b_2 = b_3$

مثال:

اگر $abc = 1$ نشان دهید :

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

حل:

قرار دهید $x = \frac{1}{a}$ و $y = \frac{1}{b}$ و $z = \frac{1}{c}$

چون $abc = 1$ پس $xyz = 1$

ما داریم :

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} =$$

$$\frac{x^2}{(y+z)} + \frac{y^2}{(x+z)} + \frac{z^2}{(x+y)}$$

$$x^4 + y^4 + z^4 + x^3y + x^3z + y^3z + xy^3 + z^3x + z^3y + x^2yz + xy^2z + xyz^2$$
$$\geq \sqrt[5]{xyz}\left(3xyz + \frac{3}{2}(x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2)\right)$$

با استفاده از نامساوی میانگین حسابی و هندسی :

از اینکه :

$$x^2yz + xy^2z + \ xyz^2 \geq 3\sqrt[5]{x^4y^4z^4}$$

و

$$\frac{x^3y + xy^3 + x^3z}{3} \geq \sqrt[5]{x^7y^4z}$$

$$\frac{7x^4 + 4y^4 + z^4}{12} \geq \sqrt[5]{x^7y^4z}$$

بنابراین :

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}$$
$$\geq \frac{\sqrt[5]{xyz}\left(3xyz + \frac{3}{2}(x^2y + x^2z + xy^2 + yz^2 + y^2z)\right)}{(y+z)(x+z)(x+y)} \geq \frac{3}{2}$$

منابع :

۱. بیگدلی،علی(۱۳۸۹).پایان‌نامه کارشناسی ارشد«استقرای ریاضی و احتمال استقرایی- منطقی»،دانشگاه تربیت مدرس.

۲. حاجی‌جمشیدی،فرزین،۱۳۸۴، ریاضیات عمومی ۱و۲ ، تهران:انتشارات دانش پژوهان فردای‌روشن

۳. رودین، والتر، ۱۳۷۶، اصول آنالیز ریاضی، مترجم علی اکبرعالم‌زاده،تهران:انتشارات علمی و فنی.

۴. سی‌لارسن، لورن،۱۳۷۷، حل مساله ازطریق مساله،مترجم: علی ساوجی، تهران:انتشارات فاطمی.

۵. شهریاری، پرویز،۱۳۸۷، استقرای ریاضی، تهران:انتشارات مدرسه.

۶. گرایتزر،سموئل،جان‌شولز،موری‌کلملین،۱۳۸۱،المپیادهای‌ریاضی‌بین‌المللی،مترجم:دکترمحمدقاسم وحیدی اصل، تهران: مبتکران.

۷. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، ۱۳۸۸، دوره ۲۸، شماره۳، تهران: انتشارات کمک آموزشی.

دوره ۲، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۵، صفحات ۴۲- ۲۶

Proof of Issues Related to Inequality in Mathematics

Parvaneh Mirzaei

Master of Pure Mathematics, Islamic Azad University, North Tehran, Lecturer in of Applied Sciences of Abdanan City, Mathematics Teacher, Second course of High School of Abdanan City

Abstract

It is obvious that various mathematical topics and a variety of different methods of solving problems is very high. Sometimes focus on content and topics that largely lead the mind to solve a difficult problem. Of course some times because of lack of familiarity with methods for solving problems failed in pushing, one of these topics are unequal in all areas of math and issues inequality issues are the most attractive. In this article method that has often succeeded in solving the inequality we examined. Although mathematics is a creative art and for every problem can be many solutions offered.

Keywords: Inequality, Show, Mathematics