مطالعات علوم کاربردی در مهندسی

دوره 1، شماره 1، زمستان 1394

صفحات 47-55

Print ISSN: xxxx-xxxx

Online ISSN: xxxx-xxxx

www.irijournals.com

تحلیل ارتعاشات آزاد ورق مدرج تابعی بر بستر الاستیک پسترناک با سه نوع شرط مرزی نامتقارن به کمک روش المانکوادراچردیفرانسیلی

ابوالفضل امامی حسین آبادی[۱]، حمید دهقان طرزجانی[۲]،رامبد رستگاری[۳]، امیر حشمت خدمتی بازکیایی[4]

[۱] کیلومتر ۳۵ اتوبان تهران ساوه، شهر جدید پرند، بلوار شهید باهنر، دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند،

[۲] کیلومتر ۳۵ اتوبان تهران ساوه، شهر جدید پرند، بلوار شهید باهنر، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند

[۳]کیلومتر ۳۵ اتوبان تهران-ساوه، شهر جدید پرند، بلوار شهید باهنر، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد پرند

[4]کیلومتر ۳۵ اتوبان تهران ساوه، شهر جدید پرند، بلوار شهید باهنر، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه آزاداسلامی واحد پرند

چکیده

در این پژوهش ارتعاشات آزاد یک ورق FGM[1] بر بستر الاستیک پسترناک را با استفاده از روش المان کوادراچر دیفرانسیلی بررسی می کنیم. ورق بر روی بستر الاستیک پسترناک می باشد. با اعمال روش DQEM[2] بر روی معادلات دیفرانسیل حرکت، شرایط مرزی و سازگاری ورق، به یک دستگاه معادلات جبری می رسیم که با حل مسئله مقدار ویژه حاصل، شکل مودهای ورق و فرکانس‌های طبیعی حاصل می گردد. همچنین تغییر در تعدادی از پارامترها، از جمله نسبت ضریب تراکم حجمی و نسبت طول بر ضخامت بر روی فرکانسهای طبیعی بررسی شده است

کلمات کلیدی: ورق نازک مدرج تابعی، ارتعاشات آزاد، المان کوادراچر دیفرانسیلی، بستر الاستیک پسترناک، شروط مرزی نامتقارن.

[1]Functionally Graded Materials

[2]Differential Quadrature Element Method

دوره 1، شماره 1، زمستان 1394، صفحات 47-55

مقدمه :

مواد مدرج تابعی، مواد کامپوزیتی بوده که از نظر میکروسکوپی غیرهمگن وخواص مکانیکی آن‌ها، بـه‌آرامـی و پیوسـته از یـک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کند. در سال ۱۹۸۴ میلادی در منطقه سندایی ژاپن [۱]، برای نخستین بار، این مواد را پیشنهاد دادند. عموماً این مواد از یک مخلوط سرامیک و فلز و یا ترکیبی از فلزات مختلف ساخته می‌شوند که بـرخلاف کامپوزیـت‌هـای تقویت شده با الیاف، مشکل عدم تطابق خواص مکانیکی در عرض یک سطح مشترک دو ماده مجزا چسـبیده بـه یکـدیگر، کـه ممکن است باعث جدا شدن در دماهای بالا گردند، را ندارد و توانایی بالای مقاومتی در محیط‌های متغیر دمایی بدون تغییـر در ساختار را از خود نشان می دهند.

برای بررسی اندرکنش مابین بستر و ورق، مدل‌های متنوعی موجود بوده که رایج‌ترین آن‌ها،پسترناک یا مدل دوپارامتری است که در آن، فندانسیون را به صورت فنرهای جدا از هم و بدون تأثیر برهم فرض گردیده است.

زنکور[۳][۲] به بررسی یک ورق FGM بر بستر الاستیک پسترناک[۴] با استفاده از تئوری سینوسی و شرایط مرزی متقارن تکیه‌گاه ساده پرداخت. ملک زاده [۳] در سال ۲۰۰۹ با تئوری الاستیسیته سه بعدی و روش حل عددی DQ[5] به بررسی همین موضوع پرداخت. در سال ۲۰۱۰، حسینی هاشمی، رکنی دماوندی طاهر و اخوان،[۴] ارتعاشات آزاد یک ورق نازک قطاعی FGM ، با ضخامت متغیر را بر بستر الاستیک دو پارامتری بررسی نمودند. ایشان با بهره‌گیری از تئوری کلاسیک (ورق های نازک)، معادلات تعادل را در مختصات استوانه‌ای بازنویسی کرده و برای حل عددی معادلات حاکم استخراجی، از روش عددی DQ استفاده نموده‌اند. بافرانی[۵] در سال ۲۰۱۱ پژوهش خود را با استفاده از تئوری مرتبه سوم برشی انجام داد. تای‌تای و هو چوی[۶][۶] با استفاده از روش حل ناویر و استفاده از فرضیه مرتبه اول برشی به بررسی ارتعاشات ورق مدرج تابعی بر بستر الاستیک در سال ۲۰۱۱ پرداختند. در سال ۱۳۹۲ خدمتی بازکیایی، دهقان طرزجانی و محمدی [۷] در پژوهشی به بررسی ارتعاشات آزاد ورق مستطیل شکل fgm بر بستر الاستیک تک پارامتری وینکلر پرداختند. برای یافتن معادلات از اصل همیلتون استفاده کردند و تک معادله حاکم بدست آمده با روش المان کوادراچر دیفرانسیلی حل شده است. ایشان شروط مرزی را نامتقارن در نظر گرفتند.

روش DQ اولین بار توسط بلمان[۷] و همکاران [۸] در اوایل دهه ۷۰ میلادی مطرح شد. آن‌ها، دو روش را برای تعیین ضرایب وزنی پیشنهاد کردند. روش اول منجر به حل دستگاه معادلات خطی می‌شد که تولید ماتریس واندرموند[۸] می‌کرد. با

---

[3]Zenkour

[4]Pasternak Elastic Foundation

[5]Differential Quadrature Method

[6]Tai Thai and Ho Choi

[7]Bellman

افزایش نقاط دقت، ماتریس بدرفتار می‌شد و از طرف دیگر معکوس گرفتن از آن نیز مشکل بود. در روش دوم آن‌ها با استفاده از یک فرمول جبری موفق به محاسبه ضرایب وزنی شدند اما در این روش مختصات نقاط دقت ریشه‌های چند جمله‌ای لژاندر بود.

۲. معادلات حاکم

یک ورق FGM نازک، قرار گرفته بر بستر الاستیک دو پارامتری را در نظر گرفته، با توجه به محور مختصات واقع شده در گوشه ورق، خواص مکانیکی برای آن، در امتداد ضخامت متغیر بوده و با توجه به قانون توانی بیان شده است:

$$P(z) = (P_m - P_c)V_m + P_c$$

$$V_m = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^{\alpha}, \alpha \geq 0 \tag{۱}$$

با توجه به رابطه (۱) و با فرض ثابت بودن نسبت پواسون:

$$E_Z = (E_m - E_c)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^{\alpha} + E_c \tag{۲}$$

$$\rho_Z = (\rho_m - \rho_c)\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^{\alpha} + \rho_c \tag{۳}$$

که در آن E مدول یانگ، ρ **Error! Bookmark not defined.** چگالی و اندیس‌های c**Error! Bookmark not defined.** و m به ترتیب به سرامیک و فلز اشاره دارد. با استفاده از تئوری کلاسیک برای ورق‌های نازک و با چشم‌پوشی از مقادیر U_0 و V_0:

$$U(x,y,z,t) = -z\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial x}$$

$$V(x,y,z,t) = -z\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial y} \tag{۴}$$

$$W(x,y,z,t) = w_0(x,y,t)$$

با اعمال دسته روابط شماره (۴) روابط کرنش-جابجایی بصورت زیر خواهد بود:

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

---

[8]Vondermond

$$\varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad (۵)$$

$$\varepsilon_{xy} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$$

با توجه به قانون هوک، روابط تنش-جابجایی نیز بصورت روابط شماره (۶) بیان شده است:

$$\sigma_x = -\frac{E(z)z}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$\sigma_y = -\frac{E(z)z}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \qquad (۶)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{E(z)z}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_z = \sigma_{yz} = 0$$

حال به منظور یافتن معادلات حاکم، انرژی پتانسیل ورق به‌صورت رابطه شماره (۷) معرفی شده است :

$$u_p = \frac{1}{2}\int_0^a \int_0^b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{ij}\varepsilon_{ij})\, dzdydx, \qquad i,j = 1,2,3 \qquad (۷)$$

که در آن روابط (۵) و (۶) را جایگذاری می کنیم.

انرژی پتانسیل حاصل از بستر الاستیک نیز در رابطه (۸) بیان می‌گردد:

$$u_f = \frac{1}{2}\iint_A (k_w w^2 - k_s \nabla w^2)\, dA \qquad (۸)$$

در رابطه (8) منظور از K_w، ضریب سختی عرضی (وینکلر) و K_S ضریب سختی برشی (پسترناک) است. میزان انرژی جنبشی ورق نیز به طریق زیر محاسبه خواهد شد:

$$T_p = \frac{1}{2}\iiint_v \rho(z)\dot{U}^2 dv, \quad i = 1,2,3 \qquad (۹)$$

دوره 1، شماره 1، زمستان 1394، صفحات 47-55

هم‌اکنون با استفاده از اصل همیلتون (رابطه(۱۰)):

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T_p - u_p - u_f) dt = 0 \qquad (۱۰)$$

و قرار دادن روابط (۷)، (۸) و (۹) در آن و ساده‌سازی، معادله حاکم برای ارتعاشات یک ورق نازک مواد مدرج تابعی بر بستر الاستیک پسترناک حاصل خواهد شد:

$$D \nabla^4 w + k_w w - k_s \nabla^2 w + I \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \qquad (۱۱)$$

$$\nabla^2 = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$$

که در آن $I = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z)\, dz$ و $D = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{(1-\nu^2)} z^2\, dz$.

۳. روش المان کوادراچر دیفرانسیلی

روش المان کوادراچر دیفرانسیلی روش عددی جدیدی برای حل، با همگرایی سریع معادلات دیفرانسیلی خطی و غیرخطی است. ایده اصلی این روش از سه قسمت اصلی تشکیل می‌شود: ۱.تقسیم دامنه‌ی متغییرها به چندین زیر دامنه یا المان ۲. استفاده از روش کوادراچر دیفرانسیل برای تقسیم هر کدام از المان‌ها و برقراری معادلات حاکم. ۳. برهم نهی المان‌های جدا شده و برقراری معادلات حاکم با در نظر گرفتن جابه‌جایی‌ها، تنش‌ها و شرایط سازگاری در المان‌های مجاور. برای محاسبه مشتق تابع با این روش ابتدا باید ضرایب وزنی را بدست آورد. چندین راه برای محاسبه ضرایب وزنی وجود دارد. برای مسائلی که دارای دامنه دو بعدی هستند، توابع متغیر $\phi^e(\zeta)$ و $\theta^e(\eta)$ به کمک ضرایب لاگرانژ متناسب با المان مجزای e در راستاهای ζ **Error! Bookmark not defined.** و η **Error! Bookmark not defined.** در دامنه اصلی تقریب زده می‌شوند:

$$\phi^e(\xi) = \frac{L(\xi)}{M^1(\xi_n)} \quad n = 1,2,\dots,N^e$$

$$L(\xi) = \prod_{\beta=1, \beta\neq n}^{N^e} (\xi - \xi_\beta) \qquad (۱۲)$$

دوره 1، شماره 1، زمستان 1394، صفحات 47-55

$$M^1(\xi_\alpha) = \prod_{\beta=1,\beta\neq n}^{N^e} (\xi_n - \xi_\beta)$$

N^e تعداد نقاط دقت در جهت ζ **Error! Bookmark not defined.** در هر المان است. مشتق اول تابع نسبت به مختصات طبیعی ζ **Error! Bookmark not defined.** با روش DQ تقریب زده می‌شود. به این صورت که مشتق اول تابع نسبت به مختصات طبیعی ζ **Error! Bookmark not defined.** برابر با مجموع وزنی مقادیر تابع در تمام نقاط المان در راستای ζ

$$\frac{d\phi^e(\xi)}{d\xi} = \sum_{\beta=1}^{N^e} D_{n\beta}^{\xi}\, \phi_\beta^e, \qquad n = 1,2,\dots,N^e$$

$$D_{n\beta}^{\xi} = \frac{M^1(\xi_n)}{(\xi_n - \xi_\beta)M^1(\xi_\beta)}, \quad n,\beta = 1,2,\dots,N^e \tag{۱۳}$$

$$D_{nn}^{\xi} = -\sum_{\gamma=1,\gamma\neq n}^{N^e} D_{n\gamma}^{\xi}, \qquad n,\beta = 1,2,\dots,N^e$$

مشتق مرتبه دوم و مراتب بالاتر راستای ζ **Error! Bookmark not defined.** و η **Error! Bookmark not defined.** به صورت مشابه نیز بدست می‌آیند.

ورق به تعدادی المان تقسیم شده و معادلات حرکت برای ارتعاشات عرضی نوشته می‌شوند. این معادلات به همراه معادلات مربوط به شرایط مرزی و شرایط سازگاری، به‌کمک روش المان کوادراچر دیفرانسیلی به یک مسئله مقدار ویژه تبدیل شده که با حل مسئله مقدار ویژه حاصل، فرکانس‌های طبیعی به‌دست می‌آید. که p تعداد المان در راستای x **Error! Bookmark not defined.**، q تعداد المان در راستای **Error! Bookmark not defined.** y می‌باشد (1 < n < p) و (1 < m < q). در روش کوادراچر دیفرانسیلی برای اعمال شرایط مرزی روشهای گوناگونی موجود است. در پژوهش حاضر از روش کلی[9] استفاده شده است.

شرایط مرزی در وجوه آزاد در جهت‌های xوy شامل گشتاور خمشی و نیروی برشی صفر بوده که در روابط(۱۴)، (۱۵) و (۱۶) بیان شده‌اند.

$$\frac{\partial^2 W^{r,s}}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 W^{r,s}}{\partial y^2} = 0 \qquad r = p$$

[9]General Approach

دوره 1، شماره 1، زمستان 1394، صفحات 47-55

$$\frac{\partial^3 W^{r,s}}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 W^{r,s}}{\partial y^2 \partial x} = 0 s = 1 \dots q \qquad (۱۴)$$

$$\frac{\partial^2 W^{r,1}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W^{r,1}}{\partial x^2} = 0 \qquad r = 1 \dots p$$

$$\frac{\partial^3 W^{r,1}}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 W^{r,1}}{\partial x^2 \partial y} = 0 \qquad (۱۵)$$

$$\frac{\partial^2 W^{r,s}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W^{r,s}}{\partial x^2} = 0 \qquad r = 1 \dots p$$

$$\frac{\partial^3 W^{r,1}}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 W^{r,s}}{\partial x^2 \partial y} = 0 \qquad s = q \qquad (۱۶)$$

شرط مرزی در گوشه‌های آزاد ورق در رابطه (۱۷) محاسبه می‌گردد

$$\frac{\partial^2 W^{r,s}}{\partial x \partial y} = 0, \qquad r = p, s = 1, q \qquad (۱۷)$$

همچنین شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده ورق شامل جابجایی و ممان برشی صفر می‌باشد.

$$W^{r,s} = 0 \qquad (۱۸)$$

$$\frac{\partial^2 W^{r,s}}{\partial x^2} = 0$$

شروط مرزی تکیه‌گاه گیردار ورق شامل جابجایی و شیب صفر می‌باشد

$$W^{r,s} = 0 \qquad (۱۹)$$

$$\frac{\partial W^{r,s}}{\partial x} = 0 \qquad r = p, s = 1, \dots, q$$

شروط مرزی برای وجوه عمودی، y **Error! Bookmark not defined.** نیز به همین صورت خواهد بود.

شرایط پیوستگی بین المان‌ها در جهت x شامل پیوستگی در جابه‌جایی، شیب، گشتاور خمشی و نیروی برشی می‌باشد.

$$W^{r,s} = W^{r+1,s}$$

$$\frac{\partial W^{r,s}}{\partial x} = \frac{\partial W^{r+1,s}}{\partial x} \qquad (۲۰)$$

$$\frac{\partial^2 W^{r,s}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W^{r,s}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 W^{r+1,s}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W^{r+1,s}}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^3 w^{r,s}}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w^{r,s}}{\partial y^2 \partial x}=\frac{\partial^3 w^{r+1,s}}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w^{r+1,s}}{\partial y^2 \partial x}$$

$$r=1\dots p\,, s=1\dots . q$$

شرایط پیوستگی بین المان‌ها در جهت y که نیز شامل پیوستگی در جابه‌جایی، شیب، گشتاورخمشی و نیروی برشی می‌باشد، به همین ترتیب برای S+1حاصل می گردد.

به منظور انتخاب نقاط دقت از چندجمله‌ای گوس-لوباتو-چبیشف استفاده شده است که در رابطه شماره (۲۱) بیان گردیده است:

$$x_i=\frac{1}{2}\left[1-cos\left(\frac{i-1}{N-1}\pi\right)\right] \qquad \mathrm{i}=2,3,\dots,\mathrm{N}-1 \tag{۲۱}$$

$$x_1=0, x_N=0$$

با اعمال روش DQEM بر روی معادله دیفرانسیلی ورق‌ها، شرایط مرزی و شرایط پیوستگی، می‌توان معادلات حاصل را به فرم زیر تبدیل نمود.

$$\begin{bmatrix}[A_{bb}] & [A_{bi}]\\ [A_{ib}] & [A_{ii}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{W_b\}\\ \{W_i\}\end{Bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}0 & 0\\ B_{ib} & B_{ii}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}W_b\\ W_i\end{Bmatrix} \tag{۲۲}$$

زیرنویس‌های b و i به ترتیب نشان دهنده مناطق مرزی و داخلی می‌باشند. بردارهای$\{W_b\}$ و $\{W_i\}$به ترتیب نشان دهنده مقادیر تابع در نقاط مرزی و داخلی هستند. همچنین در رابطه (۲۲)، λ مجذور فرکانس‌های طبیعی می‌باشد. با حل این مسئله فرکانس‌های طبیعی از مقادیر ویژه‌ی دستگاه معادلات فوق استخراج می‌شوند.

۴. نتایج عددی:

براساس روش حل معرفی شده، نتایج عددی و جزئیات بحث ارائه گردیده است. بدین منظور، یک ورق مدرج تابعی Al/Al_2O_3 متشکل از آلومینیوم و آلومینا با خواص مکانیکی معرفی شده در جدول ۱، در نظر گرفته شده است. بادر نظر گرفتن فرکانس طبیعی بی بعد ϖو ثابت هم‌ارز ضریب سختی بستر الاستیک$\overline{K_w}$ و $\overline{K_s}$به صورت:

$$\varpi=\omega h\sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \tag{۲۳}$$

$$\overline{K_w}=\frac{K_w b^4}{D_m}\,, \qquad \overline{K_s}=\frac{K_s b^2}{D_m}\,,$$

$$D_m = \frac{E_m h^3}{12(1-\nu^2)} \tag{۲۴}$$

به مقایسه نتایج بدست آمده از روش المان کوادرچر دیفرانسیلی با مرجع معتبر پژوهشی پرداخته شده است. بدین منظور، با در نظر گرفتن یک ورق مربع با دو نسبت ضخامت بر طول متفاوت برای سه شرط مرزی نامتقارن معرفی شده است. در جدول شماره (۱) خصوصیات مکانیکی ورق مورد بحث ارائه شده است.

جدول ۱: خصوصیات مکانیکی مواد مورد نظر

ماده	$\rho(kg/m^3)$	$E(Gpa)$	ν
آلومینیوم	۳۸۰۰	۷۰	۰.۳
آلومینا	۲۷۰۷	۳۸۰	۰.۳

شرایط مرزی مختلف مورد بحث در پژوهش حاضر، به‌گونه‌ای است که این شروط، در دو وجه افقی، محور x به‌صورت تکیه‌گاه ساده و در وجه y ترکیبی از شروط نامتقارن اعمال گردیده است. برای بررسی دقیق‌تر نتایج حاصله برای سه شرط مرزی فوق‌الذکر، به بیان و معرفی میزان خطای روش عددی DQEM با مرجع [۵] پرداخته شده است. میزان خطا در رابطه (25) بیان شده است:

$$ERROR = \left| \frac{\overline{W_{Ref}} - \overline{W_{DQEM}}}{\overline{W_{Ref}}} \right| \times 100 \tag{۲۵}$$

که در آن $\varpi_{\mathrm{Re}f}$ و ϖ_{DQEM} به ترتیب معرف میزان فرکانس بنیادین بی‌بعد در مرجع و روش عددی DQEM است. در جدول شماره (۲)تا (۴)به بررسی ورق مربع با نسبت ضخامت بر طول ۰.۰۵ پرداخته شده است.

۵. نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

همان گونه که در این پژوهش بیان گشت وجود بستر الاستیک کـه ورق بـر آن واقـع شـده اسـت، باعـث ایجـاد تغییـر در پارامترهای مودال از جمله فرکانس‌های طبیعی می‌گردد. از این رو در این پژوهش اثر بستر الاستیک در فرکـانس‌هـای طبیعـی ورق با استفاده از روش المانکوادراچردیفرانسیلی مورد بررسی قرار گرفت که نتایج آن به شرح زیر می باشد:

۱ . فرکانس طبیعی محاسبه شده توسط روش المانکوادراچر دیفرانسیلی تطابق قابل قبولی با مراجع مرتبط دارد.

۲ . با توجه به نتایج مشخص گردید که میزان تغییرات فرکانس طبیعی علاوه بر ضرایب سختی بستر به ضخامت و ضریب نسبت تراکم حجمی نیز وابسته است.

۳ . با اعمال ضریب سختی بستر الاستیک وینکلر و همچنین پسترناک فرکانس بنیادین ورق افزایش می‌یابد.

۴ . ضریب سختی پسترناک در مقایسه با ضریب سختی وینکلر تاثیر بیشتری در افزایش فرکانس بنیادین ورق دارد

۵ . همزمان با افزایش ضخامت ورق، فرکانس طبیعی نیز افزایش می‌یابد.

مراجع

[1] Rashedat, M. Mahmood., Esther, T. Akinlabi, 2012. “Functionally Graded Material: An Overview”. *Proceeding of the World Congress On Engineering*, (3), july, pp. 1–5.

[2] M.Zenkour, A., 2009. “The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations”. *International Journal of Mechanical Sciences*,,51, pp. 869–880.

[3] Malekzadeh, P., 2009. “Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations”. *Composite Structures*, 89, pp. 367–373.

[4] Hosseini-Hashemi, Sh., RokniDamavandiTaher, H., and Akhavan, H., 2010. “Vibration Analysis Of Radially FGM Sectorial Plates Of Variable Thickness On Elastic Foundations”. *Composite Structures*, (92), jan, pp. 1734-1743.

[5] Baferani, A. H., Saidi, A. R., Ehteshami, H., 2011. “Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation”. *Composite Structures*, 93, pp. 1842–1853.

[6] Thai, H.-T., Choi, D.-H., 2011. “A refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation”. *Composites Science and Technology*, 71, pp. 1850–1858.

[7] خدمتی بازکیایی، امیرحشمت، دهقان طرزجانی، حمید ، محمدی، نادر، ۱۳۹۲. ” بررسی ارتعاشات آزاد ورق FGM بر بستر الاستیک وینکلر به کمک روش المان کوادراچر دیفرانسیلی“ ، *دومین کنفرانس ملی سیستم‌های مکانیکی و نوآوری صنعتی*، ۲، ۸۰.

[8] Bellman R.E.,Kashef B.,Casti J.,1971. “Differential Quadrature : a Technique for the Rapid Solution of Nonlinear Partial Differential Equation”. *Computer and Physics*, 1, pp. 133–143.